SOLUTIONS OF THE EXERCISES

IN

MESSRS. HALL AND STEVENS'

NEW SCHOOL GEOMETRY

PART V InK

BY

Pandit Kanhaiya Lal Sharma B. A.

Late MATHEMATICAL TEACHER

STATE HIGH SCHOOL

RAMPUR STATE

NOW PLEADER ALIGARH.

PRINTED BY

LAKSHMI NARAYAN

at the Lakshmi Narayan Press,

MORADABAD.

1910. InK

First Edition 1000 Copies

Price per copy 8 annas

Publishers–KANHAIYA LAL & BROS. ALIGARH.

SOLUTIONS

OF

GEOMETRICAL EXERCISES

PART V.

Exercises on page 253.

1. Let x be the missing term in each of the following proportions, then

(i) $3 : 7 = 15 : x$, whence $3x = 7 \times 15$, or $x = 35$

(ii) $2.5 : x = 10 : 32$, whence $10x = 2.5 \times 32$, or $x = 8$

(iii) $x : ac^3 = bc : bc^3$, whence $bc^3 x = ac^3 \times bc$, or $x = a$

2. In a proportion, the magnitudes compared *must be of the same kind in each ratio.*

$\therefore$ The corrected statement would be—

$$£\,65 : £\,25 = 78 \text{ ft.} : 30 \text{ ft.}$$

3. Let a st line AB 9.6″ long be divided *internally* at X in the ratio 5 : 7

It is required to find the lengths of AX and XB.

Since $AX : XB = 5 : 7$, $\therefore AX + XB : XB = 5 + 7 : 7$, or $AB : XB = 12 : 7$

$\therefore 12\,XB = 7\,AB = 7 \times 9.6''$, whence $XC = 5.6''$

$\therefore AX = AB - XB = 9.6'' - 5.6'' = 4''$

4. Let a st line AB 4 5 cm long be divided *externally* at X in the ratio 11 8 *It is required to find the lengths of AX and XB*

Since $AX\ XB=11.8$, $\therefore AX-XB\ XB=11-8\ 8$, or $AB\ XB=3:8$

$\therefore 3XB=8AB=8\times 4\ 5$ cm , whence $XB=12$ cm.

$\therefore AX=AB+XB=4{\cdot}5$ cm $+12$ cm $=16\ 5$ cm.

5. Let a st line AB 6 4 cm long be divided internally at X and externally at Y in the ratio 5.3 *It is required to find the lengths of the segments*

Since $AX\ XB=5.3$, $\therefore AX+XB.XB=5+3\ 3$, or $AB\ XB=8.3$

$\therefore 8XB=3AB=3\times 6\ 4$ cm , whence $XB=2\ 4$ cm.

$\therefore AX=AB-XB=6\ 4$ cm $-2\ 4$ cm $=4$ cm

Again since $AY\ YB=5\ 3$, $\therefore AY-YB\ YB=5-3\ 3$, or $AB\ YB=2\ 3$

$\therefore 2YB=3AB=3\times 6\ 4$ cm , whence $YB=9\ 6$ cm.

$\therefore AY=AB+YB=6\ 4$ cm $+9\ 6$ cm $=16$ cm

(ii) $\therefore \dfrac{1}{AX}+\dfrac{1}{AY}=\frac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$, also $\dfrac{2}{AB}=\dfrac{2}{6\ 4}=\dfrac{5}{16}$,

$$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{1}{AX}+\frac{1}{AY}$$

6. See figure Ex. 3.

Let a st line AB a'' long be divided internally at X in the ratio $m\ n$ *It is required to show that the lengths of the segments are respectively* $\dfrac{m}{m+n}\cdot a''$, *and* $\dfrac{n}{m+n}\ a''$

Since $AX:XB=m:n$, $\therefore$ $AX+XB:XB=m+n:n$, or $AB:XB=m+n:n$

$$\therefore (m+n)\ XB=n\ AB=n\ a'', \text{ whence } XB=\frac{n}{m+n}\ a''$$

$$\therefore AX=AB-XB=a-\frac{n}{m+n}.a=\frac{m}{m+n}.a''$$

7. See figure Ex. 4.

Let a st line AB a units long be divided externally at X in the ratio $m:n$. *It is required to show that the lengths of the segments are respectively* $\frac{m}{m-n}.a$ *units, and* $\frac{n}{m-n}.a$ *units.*

Since $AX:XB=m:n$, $\therefore$ $AX-XB:XB=m-n:n$, or $AB:XB=m-n:n$

$$\therefore (m-n)\ XB=n\ AB=n\ a, \text{ whence } XB=\frac{n}{m-n}.a \text{ units}$$

$$\therefore AX=AB+XB=a+\frac{n}{m-n}\ a=\frac{m}{m-n}.a \text{ units.}$$

8. Since $a:b=x:y$, and $b:c=y:z$

$\therefore$ By multiplying the two ratios we have

$$a:c=x:z.$$

9. Since $a:b=x:y$, $\therefore$ Inversely $b:a=y:x$

$\therefore a+b:a=x+y:x$ **(alternendo)**

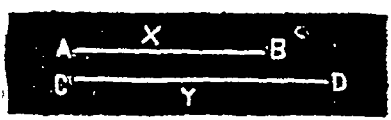
10. Let a, b, c be three proportionals, then

$$a:b=b:c.$$

$\therefore$ By multiplying these equal ratios we will get the square of one of them, that is

$$a:c=a^2:b^2.$$

11. Let AB and CD be two st lines divided internally in the same ratio at X and Y respectively.



It is required to show that (i) $AB.XB=CD.YD$, *and*

(ii) $AB\ AX = CD\ CY$

Since $AX\ XB = CY\ YD$, $\therefore AX + XB\ XB = CY + YD : YD$,

or $AB\ \ XB = CD\ YD$

Again since $AX\ XB = CY : YD$, $\therefore$ Inversely $XB\ AX = YD\ CY$

$XB + AX\ AX = YD + CY\ CY$, or $AB.AX = CD\ CY$.

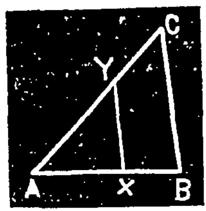
12. Let a, b, c, d be four st lines such that $ad = bc$ *It is required to prove that* $a\ b = c : d$.

Dividing each side of the equation $ad = bc$ by bd, we have

$$a\ \ b = c \cdot d$$

Exercises on page 258.

1. Upon a st line AB 3 5″ long, draw a triangle ABC such that one of its sides $AC = 4\ 5''$. From AB cut off $AX = 2\ 1''$, then $BX = AB - AX$ $= 3\ 5'' - 2\ 1'' = 1\ 4''$



From X draw XY parl to BC meeting AC in Y. Measure AY, CY and notice that $AY = 2\ 7''$ and $CY = 1\ 8''$

$\therefore$ (i) $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{2{\cdot}1}{1\ 4} = \dfrac{3}{2}$, and $\dfrac{AY}{CY} = \dfrac{2\ 7}{1\ 8} = \dfrac{3}{2}$, $\quad \dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AY}{CY}$

(ii) $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{3\ 5}{2\ 1} = \dfrac{5}{3}$, and $\dfrac{AC}{AY} = \dfrac{4\ 5}{2\ 7} = \dfrac{5}{3}$, $\therefore \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$

(iii) $\dfrac{AB}{XB} = \dfrac{3\ 5}{1\ 4} = \dfrac{5}{2}$, and $\dfrac{AC}{YC} = \dfrac{4\ 5}{1\ 8} = \dfrac{5}{2}$, $\therefore \dfrac{AB}{XB} = \dfrac{AC}{YC}$

2. See figure Ex. 1.

Let ABC be a triangle, and let XY be drawn parl to BC cutting AB at X and AC at Y, then

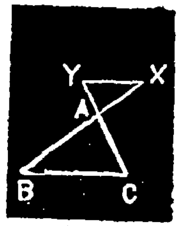
$AY \cdot AC = AX.AB$ [Th 60, cor], $\therefore AB.AY = AC.AX$

$\therefore$ (i) If $AB = 3{\cdot}6''$, $AC = 2{\cdot}4''$, and $AX = 2{\cdot}1''$, then
$3{\cdot}6 \times AY = 2{\cdot}4 \times 2{\cdot}1$, whence $AY = 1{\cdot}4''$

(ii) If $AB = 2''$, $AC = 1{\cdot}5''$, and $AY = {\cdot}9''$; then
$2 \times {\cdot}9 = 1{\cdot}5 \times AX$, whence $AX = 1{\cdot}2''$
$\therefore BX = AB - AX = 2'' - 1{\cdot}2'' = {\cdot}8''$

(iii) If X divides AB in the ratio $8:3$, and if $AC = 8{\cdot}8$cm then since $AY:YC = AX:XB = 8:3$
$\therefore AB:YC = 11:3$, whence $11YC = 3AC = 26{\cdot}4$cm ; $\therefore YC = 2{\cdot}4$cm.
$\therefore AY = AC - YC = 8{\cdot}8 - 2{\cdot}4 = 6{\cdot}4$ cm.

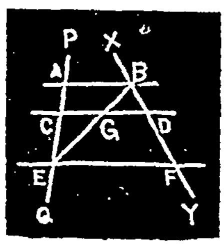
3. Let ABC be a triangle, and let XY be drawn parl. to BC cutting the sides AB, AC produced at X and Y respectively, then $AY:AC = AX:AB$ [Th 60, cor] $\therefore AB.AY = AC.AX$



$\therefore$ (i) If $AB = 4{\cdot}5$cm. $AC = 3{\cdot}5$cm, and $AX = 7{\cdot}2$cm, then $4{\cdot}5 \times AY = 3{\cdot}5 \times 7{\cdot}2$, whence $AY = 5{\cdot}6$cm

(ii) If X divides AB externally in the ratio $11:4$, and if $AC = 4{\cdot}9$cm, then $YC:AY = XB:AX = 11:4$
$\therefore AC:AY = 7:4$, whence $7AY = 4AC = 19{\cdot}6$cm.; $\therefore AY = 2{\cdot}8$cm
$\therefore YC = AC + AY = 4{\cdot}9 + 2{\cdot}8$cm. $= 7{\cdot}7$cm.

4. Let three parallel st lines AB, CD, EF be cut by two transversals PQ, XY in the pts A, C, E and B, D, F as shown in the diagram *It is required to prove that* $AC:CE = BD.DF$



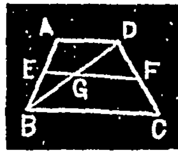
Join BE, cutting CD at G, then since CG is parl to AB,

$$\therefore AC \cdot CE = BG \cdot GE \quad [\text{Th. } 60]$$

Again since DG is parl to EF, $\therefore BG \cdot GE = BD.DF$ [Th 60]

$$\therefore AC \cdot CE = BD \cdot DF$$

5. Let $ABCD$ be a trapezium, and let E, F be the middle points of the oblique sides AB and CD respectively Join EF, *then shall* EF *be parl to* AD *or* BC



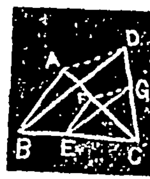
For, if not, let Ef be parl to BC meeting BD, CD in the pts G and f. Then it can be proved as in Ex 4, that

$$AE:EB = DG:BG = Df:fC$$

But $AE = EB$, hence $Df = fC$

$\therefore$ The pt f coincides with F, and therefore EF is parl to BC

6. Let ABC, DBC be two triangles on the same base BC and on the same side of it Take any pt E in BC, and from E draw lines parl to BA, BD meeting AC in F, and DC in G.



Join AD, FG, *then shall* FG *be parl to* AD

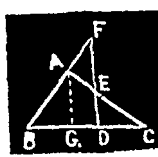
Since EF is parl. to AB, $\therefore BE:EC = AF:FC$ [Th 60]

Again since EG is parl to BD, $\therefore BE:EC = DG:GC$ „

$$\therefore AF:FC = DG:GC$$

$\therefore FG$ is parl to AD [Converse of Th. 60

7. Let ABC be a triangle, and let a transversal DEF cut the sides BC, CA, AB in the pts. D, E, F respectively such that $\angle AEF = \angle AFE$ *It is required to prove that* $BD:CD = BF:CE$



From A draw AG parl. to DE meeting BC in G

Since AG is parl. to FD, $\therefore BG.GD=BA.AF$, [Th. 60]

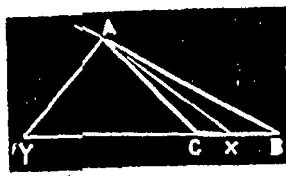
and $\therefore BD.GD=BF\ AF$ **componendo**

$=BF\ AE$ …… .. .(i) [$\because AF=AE$

Again since AG is parl to DE, $GD\ CD=AE\ CE$ [Th 60] .(ii)

From (i) and (ii) by multiplication we have $BD.CD=BF.CE$

Exercises on page 259



1. Let ABC be a triangle having $a=1\ 5''$, $b=2\ 4''$, and $c=3\ 6''$, and let the internal and external bisectors of the $\angle A$ meet BC at X and Y.

Measure BX, XC, BY, YC, and notice that $BX=\cdot 9''$, $XC=\cdot 6''$, $BY=4\cdot 5''$, and $YC=3\ 0''$

$\therefore BX.CX=\cdot 9.\cdot 6=3{:}2$, $BY{:}YC=4\ 5\ 3\cdot 0=3\ 2$,

and $BA\cdot AC=3\ 6.\ 2\cdot 4=3.2$

$\therefore BX.CX=BY\ YC=BA\ AC$

2. See figure Ex 1

Let ABC be a triangle having $a=3\ 5$cm, $b=5\ 4$cm, and $c=7\ 2$cm, and let the the internal and external bisectors of the $\angle A$ meet BC at X and Y.

Measure BX, XC, BY, YC, and notice that $BX=2\ 0$cm., $XC=1\cdot 5$ cm, $BY=14\cdot 0$cm, and $YC=10\ 5$cm

By *calculation* since $BX\ XC=BA\ AC$ [Th 61]$=7\ 2.5\cdot 4=4{:}3$

$\therefore BX+CX\ CX=4+3.\ 3$, or $BC.CX=7\ 3$

$\therefore 7CX=3BC=3\times 3\cdot 5$cm, or $CX=1\ 5$cm.

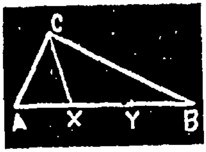
$\therefore BX=BC-CX=3\ 5-1\ 5=2$cm.

Again because $BY : YC = BA : AC$ [Th 61] $= 7.2 : 5.4 = 4 : 3$

$\therefore$ $BY - YC : YC = 4 - 3 : 3$, or $BC : YC = 1 : 3$, $\therefore$ $YC = 3BC = 10.5$cm

$\therefore$ $BY = BC + CY = 3.5$cm $+ 10.5$cm $= 14$cm

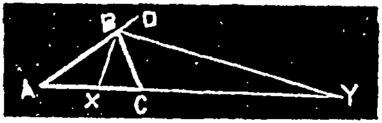
3. (i) Let AB be a given st line. *It is required to trisect it by means of Theor. 61*



With centres A, B and radii 1 and 2 units of length respectively draw two arcs intersecting at C. Join AC, BC, and let the bisector of the $\angle ACB$ meet AB at X

Then $AX : BX = AC : BC = 1 : 2$ [Th 61] $\therefore$ $BX = 2AX$.
Bisect BX at Y. Then AB is trisected at X and Y.

(ii) *It is required to divide AC internally and externally in the ratio 3 : 2*



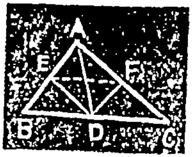
With centres A, C and radii 3 and 2 units of length respectively draw two arcs intersecting at B. Join AB, CB, and let the internal and external bisectors of the $\angle B$ meet AC at X and Y.

Then $AX : CX = AB : BC = 3 : 2$ [Th 61]
also $AY : CY = AB : BC = 3 : 2$ "

$\therefore$ $AX : CX = AY : CY = 3 : 2$

$\therefore$ AC is divided internally at X and externally at Y in the ratio 3 : 2

4. Let AD be a median of the $\triangle ABC$, and let DE, DF the bisectors of the $\angle$s ADB, ADC meet the sides AB, AC in the pts. E and F respectively. Join EF, *then shall EF be parl to BC*

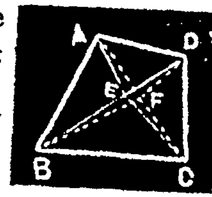


Since DE bisects the $\angle ADB$, $\therefore AE{:}EB = AD{:}DB$ (Th. 61)
Again, since DF bisects the $\angle ADC$, $\therefore AF{:}FC = AD{:}DC$ „
$= AD{:}DB$ ($\because DC = DB$)

$$\therefore AE{:}EB = AF{:}FC$$

$\therefore EF$ is parl. to BC [Converse of Th. 60]

5. Let $ABCD$ be a quadrilateral, and let the bisectors of the $\angle$s A and C meet at the pt E in BD. Join AC, and let the bisector of the $\angle B$ meet AC in F.



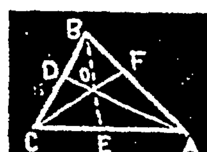
Join DF; *then shall DF bisect the* $\angle ADC$

Since AE bisects the $\angle BAD$, $\therefore AB{:}AD = BE{:}ED$ (Th 61),
also since CE bisects the $\angle BCD$, $\therefore BC{:}CD = BE{:}ED$ „
$\therefore AB{:}AD = BC{:}CD$, or *alternately* $AB{:}BC = AD{:}CD$
Again, since BF bisects the $\angle ABC$, $\therefore AB{:}BC = AF{:}CF$ (Th. 61)

$$\therefore AD{:}CD = AF{:}CF$$

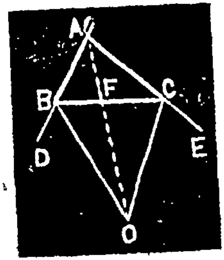
$\therefore FD$ bisects the $\angle ADC$ (*Converse of Th 61*)

6. Let ABC be a triangle, and let AD, CF the bisector of the $\angle$s A and C meet in O Join BO, and produce it to meet AC in E.
Then shall BE bisect the $\angle B$



Since AO bisects the $\angle BAE$, $\therefore BA{:}AE = BO{:}OE$ (Th 61,)
also since CO bisects the $\angle BCE$, $\therefore BC{:}CE = BO{:}OE$ „
$\therefore BA{:}AE = BC{:}CE$, or *alternately* $BA{:}BC = AE{:}CE$
$\therefore BE$ bisects the $\angle B$ (*Converse of Th 61*)

(ii) Let ABC be a triangle, and let the external bisectors of the $\angle$s B and C meet at O. Join AO, cutting BC at F.



Then shall AO bisect the $\angle BAC$

Since BO bisects the $\angle DBF$,

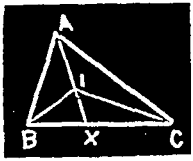
$\therefore AB\ BF = AO\ OF$ (Th 61),

also since CO bisects the $\angle FCE$, $\therefore AC\ CF = AO\ OF$

$\therefore AB.BF = AC\ CF$, or *alternately* $AB\ AC = BF\ CF$

$\therefore AF$, or AO bisects the $\angle BAC$ (*converse of Th 61*)

7. Let ABC be a triangle and I its in-centre Join AI, BI, CI, and produce AI to meet BC at X *Then shall $AI\ IX = AB+AC\ :BC$*



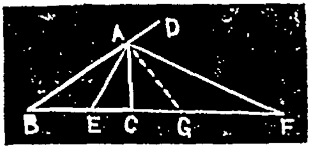
Since CI bisects the $\angle ACX$, $AI\ IX = AC\ CX$

(Th 61)

also since BI bisects the $\angle ABX$, $\therefore AI\ IX = AB\ BX$

$$AC\ CX = AB\ BX$$
$$= AB+AC\ \ BX+CX \qquad \text{(Prop V, p 251)}$$
$$= AB+AC\ \ BC$$

8. Let ABC be any triangle on the given base BC and having $BA\ AC = m\ n$ *It is required to find the locus of A*



Let the internal and external bisectors of the $\angle A$ meet BC and BC produced at E and F

Then $BE\ EC = BA\ AC = BF\ FC$ (Th. 61)

∴ *BC* (*a fixed* st. line) is divided internally at *E*, and externally at *F* in the same ratio *BA*.*AC*, or *m*:*n*

∴ *E* and *F* are fixed points, and hence *EF* is of constant length.

Again because the ∠*EAF* (being an angle between the internal and external bisectors of the ∠*A*) is a right angle.

∵ the locus of *A* is a circle on the diameter *EF*

Note—This important locus is known as the **Apollonian locus.**

9. Let *BC* be the given base, *m*:*n* the ratio of the other sides *BA*,*AC*, and *X* the given vertical angle *It is required to construct the triangle.*

Upon *BC* describe a segment having an angle = ∠*X*. Then *A* lies on the arc of this sigment.

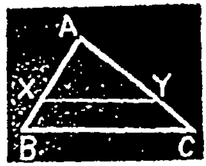
Again divide *BC* internally at *E* and externally at *F* in the same ratio *m*:*n*, and on the diameter *EF* describe circle, then *A* lies on this circle (*Proved in EX.8*)

∴ the pt. *A* where this circle cuts the former arc is the vertex of the required triangle

Join *AB*, *AC*. Then *ABC* is the required triangle.

Note—*This exercise can also be easily proved by means of Theor. 62 as shown in EX. 9 (IV) P. 278.*

Exercises on page 262.



1. Let ABC be a triangle, and let XY be drawn parl to BC cutting AB at X, and AC at Y. Then,

the $\angle AXY$=the alt. $\angle ABC$, and the $\angle AYX$ =the alt. $\angle ACB$ [Th. 14].

∴ The third angles of the $\triangle$s AXY, ABC are also equal, and hence they are equiangular

$AB\ AX = AC\ AY$ [Th. 62], and ∴ $AB\ AY = AC\ AX$.

(i) If $AB=2{\cdot}5''$, $AC=2\ 0''$, $AX=1\ 5''$; then
$2\ 5 \times AY = 2 \times 1{\cdot}5$, whence $AY=1{\cdot}2''$

(ii) If $AB=3\ 5''$, $AC=2\ 1''$, $AY=1\ 2''$; then
$3\ 5 \times 1{\cdot}2 = 2\ 1 \times AX$, when $AX=2''$

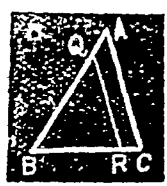
(iii) If $AB=4\ 2$ cm, $AX=3\ 6$ cm, $AY=6\ 6$ cm, then
$4\ 2 \times 6\ 6 = 3\ 6 \times AC$, whence $AC=7\ 7$ cm.

2. See figure Ex. 1.

Since $AB\ AX = BC\ XY$ [Th 62], $AB\ XY = AX\ BC$.

∴ (i) If $AB=2\ 4''$, $BC=3\ 6''$, $AX=1\ 4''$; then
$2\ 4 \times XY = 1{\cdot}4 \times 3\ 6$, whence $XY=2\ 1''$

(ii) If $BC=7\ 7$ cm, $XY=5\ 5$ cm., $AX=4\ 5$ cm, then
$5\ 5 \times AB = 4\ 5 \times 7\ 7$, whence $AB=6\ 3$ cm.



3. Let ABC be a triangle having $a=3''$, $b=3\ 6''$, $=4\ 2''$, and let a st line QR drawn parl to AC neasure $8''$. *It is required to find QB, BR.*

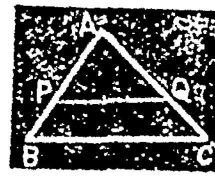
As in Ex 1, the $\triangle$s QBR and ABC are equiangular.

$\therefore QB\ AB = QR{:}AC$, $\therefore QB\ AC = QR.AB$, or $8{\cdot}6 \times QB = 3 \times 4{\cdot}8$

$\therefore QB = 3{\cdot}5''$

Also $BR{:}BC = QR{\cdot}AC$, $\therefore BR\ AC = QR.BC$, or $8{\cdot}6 \times BR = 8 \times 3$

$\therefore BR = 2{\cdot}5''$.



4. Let ABC be a triangle having $a=8$ cm, $b=7$ cm, $c=10$ cm From AB cut off $AP=4$ cm, draw PQ parl. to BC. *It is required to find PQ and QC.*

Since the Δs APQ, ABC are equiangular,

$\therefore AP{\cdot}AB = PQ\ BC$, $\therefore AP\ BC = AB.PQ$, or $4 \times 8 = 10 \times PQ$

$\therefore PQ = 3{\cdot}2$ cm.

Also $AQ{:}AC = AP\ AB$, $\therefore AQ\ AB = AC.AP$, or $10 \times AQ = 7 \times 4$

$\therefore AQ = 2{\cdot}8$ cm, and $\therefore QC = AC - AQ = 7 - 2{\cdot}8 = 4{\cdot}2$ cm

5. Let the three sides BA, AC, CB of the triangle ABC represent the sides of the field measuring 300 yds., 350 yds., and 400 yds. respectively

Then $AC{\cdot}BC = 350\ 400 = 7{:}8$, $\therefore$ If $BC = 2\ 4''$, $AC = 2\ 1''$

And $AB{\cdot}BC = 300.400 = 3{:}4$, $\therefore$ If $BC = 2\ 4''$, $AB = 1{\cdot}8''$

6. See figure Ex. 1.

Let ABC be a triangle, and let XY be parl. to BC. Then if $AX = 8\frac{1}{2}$ ft, $XY = 3\frac{1}{3}$ ft., $AY = 6$ ft. 2 in., and $XB = 4\frac{1}{4}$ ft, *it is required to find AB, BC and CA.*

$AB = AX + BX = 8\frac{1}{2}$ ft. $+ 4\frac{1}{4}$ ft $= 12\frac{3}{4}$ ft.

Since the Δs AXY, ABC are equiangular,

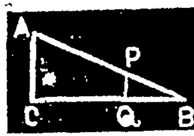
$\therefore AX{:}AB = XY.BC$, $\therefore AX.BC = AB\ XY$, or $8\frac{1}{2} \times BC = 12\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{3}$

$\therefore BC = 5$ ft.

And $A{\cdot}XAB = AY.AC$, $\therefore AX.AC = AB.AY$, or $8\frac{1}{2} \times AC = 12\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{6}$

$\therefore AC = 9\frac{1}{4}$ ft.

7. Let ABC be a triangle right-angled at C. Take a pt P in AB, and draw PQ parl to AC. Then if $AC=1\frac{1}{4}''$, $BC=3''$, $PQ=\frac{1}{2}''$, *it is required to find* BQ, BP, *and* AP.



$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{\tfrac{25}{16}+9}=\tfrac{13}{4}''$$

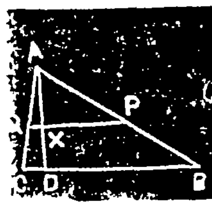
Since the $\triangle$s PBQ, ABC are equiangular,

$\therefore BQ:BC=PQ:AC$, $\therefore AC\cdot BQ=BC\cdot PQ$, or $\frac{5}{4}\times BQ=3\times\frac{1}{2}$, $\therefore BQ=1{\cdot}2''$
and $BP:AB=PQ:AC$, $\therefore AC\cdot BP=AB\cdot PQ$, or $\frac{5}{4}\times BP=\frac{13}{4}\times\frac{1}{2}$

$$\therefore BP=1{\cdot}3''$$

$$\therefore AP=AB-BP=\tfrac{13}{4}-1{\cdot}3=1{\cdot}95''$$

8. In a triangle ABC let AD be perp. to BC, and let PXQ be a st line parl to BC cutting AB at P, AD at X, and AC at Q. Then if $BC=9$cm., $AD=8$cm., $DX=3$cm., *it is required to find* PQ.



Since $AX=AD-DX=8-3=5$cm., and $\triangle$s APX, ABD are equiangular $\therefore AX:AD=PX:BD$.
Again since the $\triangle$s AQX, ABD are equiangular,

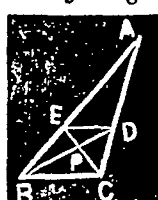
$$\therefore AX:AD=QX:CD$$

$$\therefore AX:AD=PX:BD=QX:CD$$

$$=PX+QX:BD+CD \text{ i.e. } PQ:BC \text{ (Prop V, p. 251)}$$

$\therefore AX\cdot BC=AD\cdot PQ$, or $5\times9=8\times PQ$, whence $PQ=5\frac{5}{8}$cm.

9. Let ABC be a triangle having $a=2$cm., $b=3{\cdot}5$cm., $c=4{\cdot}5$cm., and let there be drawn two st lines BD, CE to the opp. sides intersecting at P. Then if $EP:PB=DP:PB=2:5$,



It is required to find ED, AD, and DC

In the $\triangle$s BPC, and EPD, because the sides about the equal angles at P are given proportional.

$\therefore \angle PED = \angle BCP$ (Th 62), but these are alternate angles

$\because DE$ is parl BC (Th 13), and therefore the $\triangle$s ADE, ABC are equiangular.

Since the $\triangle$s PED, BPC are equiangular,

$\therefore DE : BC = EP : PC = 2:5$, $\therefore 5DE = 2BC = 4$cm, $\therefore DE = .8$cm

Again since the $\triangle$s ADE, ABC are equiangular,

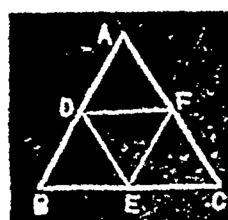
$\therefore AD : DE = AC : BC$, $\therefore BC \cdot AD = AC \cdot DE$, or $2AD = 3.5 \times .8$

$\therefore AD = 1{\cdot}4$cm., and $\therefore DC = AC - AD = 3.5 - 1.4 = 2.1$cm

Exercises on page 263

1. Let D, F be the middle points of the sides AB, AC of the $\triangle ABC$

It is required to prove that DF is parl to and half of BC



Since $AD : AB = 1:2 = AF : AC$ (*Hypothesis*)

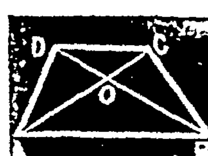
$\therefore$ the sides about the common $\angle A$ of the $\triangle$s ADF, ABC are proportional, hence they are equiangular. (Th 63)

$\therefore \angle ADF = \angle ABC$, but these are alternate angles,

$\therefore DE$ is parl. to BC (Th 13)

Also $DF : BC = AD : AB = 1:2$, $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$

2. Let the diagonals AC, BD of the trapezium $ABCD$ intersect at O *It is required to prove that $OA : OC = OB : OD$.*



Since $\angle DCA =$ alt. $\angle CAB$, and $\angle CDB =$ alt

$\angle DBA$ (Th 14)

∴ the third angles of the $\triangle s$ COD, AOB are also equal, and hence they are equiangular

∴ $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ (Th 62)

(ii) If $AB = 2DC$, *it is required to show that O is a point of trisection on both diagonals*

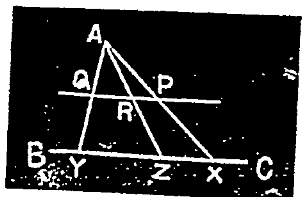
Since the $\triangle s$ COD, AOB are equiangular

∴ OA $OC = OB$ $OD = AB : DC$ (Th. 62)

But $AB = 2\ DC$, ∴ $OA = 2\ OC$, and $OB = 2OD$

∴ A, O is a pt of trisection of both AC, and BD.

3. Let AX, AY, AZ be three transversals cut by two parallels at the pts P, Q, R and X, Y, Z respectively. *It is required to prove that* XY $YZ = PQ$ QR



Since the $\triangle s$ APQ, AXY are equiangular,

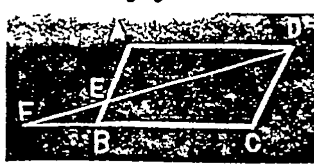
∴ $XY . PQ = AY . AQ$ (Th 62)

Again since the $\triangle s$ AQR, AYZ are equiangular,

∴ YZ $QR = AY$ AQ (Th 62)

∴ XY $PQ = YZ$ QR, or *alternately* XY $YZ = PQ$ QR.

4. Let a st. line DE drawn from the angular point D of a parlm. $ABCD$ cut the side AB at E and CB produced at F. *It is required to prove that* DA $AE = FB$ $BE = FC$ CD.



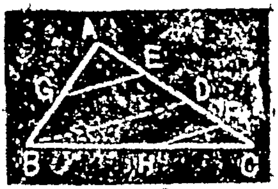
Since that $\triangle s$ AED, BEF are equiangular,

∴ DA $FB = AE$ BE [Th. 62], or *alternately* DA $AE = FB$ BE

Again since the $\triangle$s FCD, FBE are equiangular,

$\therefore FC \cdot BF = CD \cdot BE$ [Th. 62], or *alternately* $FC : CD = FB : BE$

$\therefore DA \cdot AE = FB \cdot BE = FC : CD$.

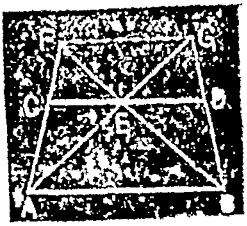


5. Let D be any point in the side AC of the $\triangle\ ABC$, and let E, F, G, H be the middle pts of AD, DC, AB, BC respectively *It is required to prove that* $EG = HF$.

Join BD, then in the $\triangle\ ABD$, since E, G are the middle points of AD and AB, hence $EG = \frac{1}{2} BD$ [*proved in Ex 1*]

Again in the $\triangle\ CBD$, since F, H are the middle points of CD, and BC, hence $HF = \frac{1}{2} BD$ [*proved in Ex. 1*]

$\therefore EG = HF$.



6. Let AB, CD be any two parl. st lines, and let E be the middle point of CD, also let AC, BE meet at F, and AE, BD at G Join FG, then *it is required to prove that FG is parl. to AB.*

Since AB is parl. to CE, hence the $\triangle$s FAB, FCE are equiangular

$\therefore BF : EF = AB : CE$ [Th. 62]

$= AB : DE$ [$\because CE = DE$]

Again since AB is parl. to DE, hence the $\triangle$s GAB, GDE are equiangular.

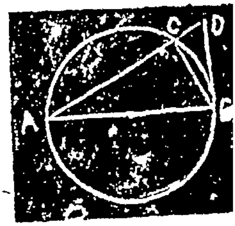
$\therefore AG : GE = AB : DE$ [Th 62]

$\therefore BF : EF = AG : GE$, and $\therefore BF - EF : EF = AG - GE : GE$.

i. e $BE : EF = AE : GE$, and the $\angle AEB = \angle FEG$

$\therefore$ $\triangle$s AEB, FEG are similar so that $\angle ABE = \angle EFG$ (Th 64)

But these are alternate angles, therefore FG is parl. to AB



7. Let AB be a diameter of a circle, and through A let there be drawn any st. line to cut the circumference in C and the tangent at B in D. *It is required to prove that* (i) $\triangle$s CAB, BAD *are equiangular*, (ii) AC, AB, AD *are proportionals, and* (iii) *the rect* AC AD *is constant for all positions of* AD

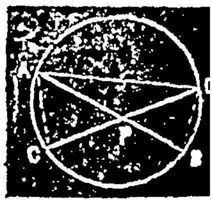
(i) In the $\triangle$s CAB, BAD because the $\angle A$ is common, and the $\angle ABD = \angle ACB$ (each being a rt angle Th. 46 and 41), hence their third angles are also equal.

$\therefore$ The $\triangle$s CAB, BAD are equiangular.

(ii) From (i) we have $AC.AB = AB$ AD, i.e. AC, AB, AD are proportionals

(iii) From (ii) we have AC $AD = AB^2$

But AB is of constant length, hence the rect AC AD is constant for all positions of AD



8 Let AB, CD be two chords of a circle intersecting at a pt. P within the circle Join AC,BD, *then it is required to prove that* (i) $\triangle$s APC, DPB *are equiangular, and* (ii) AP $DP = PC$ PB

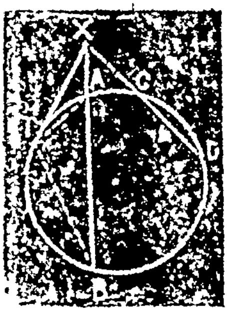
(i) In the $\triangle$s APC, DPB because $\angle APC = \angle DPB$, and $\angle ACP = \angle PBD$ [since they are in the same segment $ACBD$ Th. 39], hence their third angles are also equal

$\therefore$ The $\triangle$s APC, DPB, are equiangular.

(ii) From (i) we have $AP \cdot DP = PC$ PB [Th. 62.]

(iii) From (ii) we have $AP.$ $PB = DP.$ PC

∴ If two chords of a circle intersect at a point within it, the rectangles contained by their segments are equal. [Th 57.]



9. From an external pt X let there be drawn a tangent XT and a secant XAB to a circle. Join AT, TB, *then it is required to prove that* (i) *the* $\triangle s$ AXT, TXB *are equiangular and* (ii) $XA{:}XT=XT{:}XB$.

In the $\triangle s$ AXT, TXB because the angle at X is common, and $\angle XTA = \angle TBX$ in the alt segment [Th 49]; hence their third angles are also equal.

∴ The $\triangle s$ AXT, TXB are equiangular.

(ii) From (i) we have $XA{:}XT=XT{:}XB$ [Th. 62.]

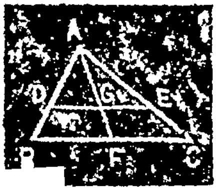
(iii) From (ii) we have $XA.\ XB=XT^2$

Similarly, if XCD be any other secant from X it may be proved that $XC.XD=XT^2$

∴ $XA.XB=XC.XD=XT^2$

∴ If two chords of a circle, when produced, cut at a point outside it, the rectangles contained by their segments are equal. And each rectangle is equal to the square on the tangent from the point of intersection [Th. 58.]

Exercises on Page 267.



1. Let DE be any st line parl. to the base BC and terminated by the other two sides of the $\triangle ABC$, and let AF be its median through A cutting DE in G. *It is required to prove that* $DG=EG$.

Since DG is parl. to BF, hence the $\triangle$s ADG, ABF are equiangular

$$\therefore DG : BF = AG : AF$$

Again since GE is parl. to FC, hence the $\triangle$s AGE, AFC are equiangular.

$$\therefore GE : FC = AG : AF$$

$\therefore DG : BF = GE : FC$, But $BF = FC$ [Hyp.], $\therefore DG = GE$.

2. Let ABC, $A'B'C'$ be two equiangular triangles, then if p, p' denote the perp from A, A' to the opp. sides, R, R' their circum-radii, and r, r' their in-radii, *it is required to prove that each of the ratios $p : p'$, $R : R'$, $r : r'$ is equal to the ratio of any pair of corresponding sides.*

(i) Draw AD, $A'D'$ perp. from A, A' to the opp. sides. Then in the $\triangle$s ABD, $A'B'D'$ since $\angle ABD = \angle A'B'D'$ [Hyp.], $\angle ADB = \angle A'D'B'$ (each being a rt $\angle$); hence their third angles are also equal, i.e. they are equiangular.

$$\therefore AD : A'D' = AB : A'B', \text{ or } p : p' = AB : A'B'$$

(ii) Let O, O' be their corresponding circum-centres. Join OB, OC, and $O'B'$, $O'C'$. Then $\angle BOC$ (at the centre) $= 2\angle BAC$ (at the circumference), and similarly $\angle B'O'C' = 2\angle B'A'C'$. [Th. 38.

But $\angle BAC = \angle B'A'C'$ [Hyp.], $\therefore \angle BOC = \angle B'O'C'$.

And since $OB = OC$, and $O'B' = O'C'$; $\therefore OB : O'B' = OC : O'C'$

$\therefore$ the $\triangle$s OCB, $O'B'C'$ are similar (Th 64)

$\therefore OB : O'B' = BC : B'C'$, $R : R' = BC : B'C'$

(iii) Let Q, Q' be their corresponding in-centres. Join

BQ, $B'Q'$, and draw QE, $Q'E'$ perp. to BC and $B'C'$ respectively. Then BQ, $B'Q'$ bisect the $\angle$s ABC and $A'B'C'$ respectively [Prob. 26], and hence $\angle QBE = \angle Q'B'E'$.

$\therefore$ In the $\triangle$s BQE, $B'Q'E'$ because $\angle QBE = \angle Q'B'E'$, $\angle QEB = \angle Q'E'B'$; hence their third angles are also equal, i.e. they are equiangular.

$$\therefore QE : Q'E' = BE : B'E'$$

Similarly it can be proved that $QE : Q'E' = CE : C'E'$

$$\therefore QE : Q'E' = (BE + CE) : (B'E' + C'E') \quad \text{[Prop V, p. 251]}$$
$$= BC : B'C'$$
$$\text{or } r : r' = BC : B'C'$$

But since the $\triangle$s ABC, $A'B'C'$ are equiangular.

$$\therefore AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' \quad \text{(Th 62)}$$

$\therefore$ Each of the ratios $p : p'$, $R : R'$, $r : r'$ is equal to the ratio of any pair of corresponding sides of the $\triangle$s ABC, $A'B'C'$.

3. Let D, E, F be the middle pts. of the sides AB, BC, CA of the $\triangle$ ABC; and let R, R' denote the circum-radii of the $\triangle$s DEF, ABC. *It is required to prove that* $R = \frac{1}{2}R'$

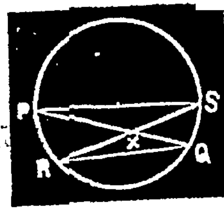
Since each of the figures BF, CD and AE is a parallelogram, hence $\angle DFE = \angle DBE$, $\angle EDF = \angle ECF$, and $\angle DEF = \angle DAF$ [Th 21].

$\therefore$ The $\triangle$s DEF, ABC are equiangular.

$$\therefore R : R' = EF : AB \qquad \text{(Proved in Ex. 2)}$$

But $EF = \frac{1}{2} AB$, $\therefore R = \frac{1}{2}R'$

4. Let PQ, RS be two st lines intersecting at X such that $PX \cdot RX = SX \cdot QX$; *then it is required to prove that* (i) $\triangle$s PXS, QXR *are similar; and* (ii) *the pts.* P, R, Q, S *are concyclic*



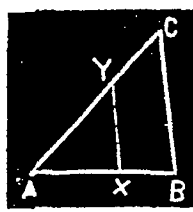
(i) In the $\triangle$s PXS, QXR since $\angle PXS = \angle QXR$ and the sides about these angles are proportional, for $PX \cdot RX = SX \cdot QX$. (Hyp)

$\therefore$ They are similar [Th. 64]

(ii) $\therefore$ The angles opposite to the corresponding sides PX, RX are equal, i e $\angle PSR = \angle PQR$.

$\therefore$ The pts P, R, Q, S are concyclic (*Converse of* Th. 39)

5. Let A, X, B be any three collinear points, and from X and B let two parl. st. lines XY, BC be drawn in the same sense such that $XY \cdot BC = AX \cdot AB$ *Then shall the pts.* A, Y, C *be collinear.*



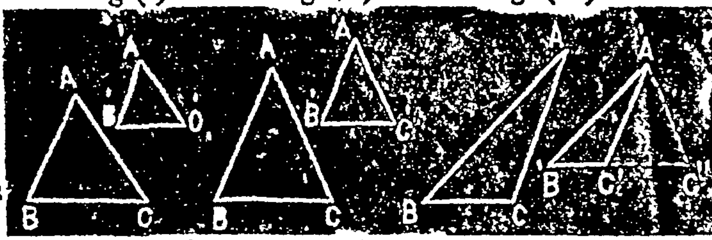
Join AY, AC Then in the $\triangle$s AXY, ABC because the $\angle AXY =$ the corresponding $\angle ABC$ (Th. 14), and the sides about them are proportional, for $XY \cdot BC = AX \cdot AB$ (Hyp)

$\therefore$ the $\triangle$s AXY, ABC are similar (Th 64), so that $\angle AYX = \angle ACB$. And since XY is parl. to and in the same sense as BC.

$\therefore$ The pts. A, Y, C are collinear.

6. If ABC $A'B'C'$ be two triangles such that $\angle B = \angle B'$, and, $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ then either the angles C, C' are equal or supplementary (Th 65)

Fig (i) Fig. (ii) Fig. (iii)



(i) If c is less than b, as shown in Fig. (i) then c' is less than b'; and hence $\angle s$ C, C' are less than $\angle s$ B, B' respectively

∴ $\angle s$ C, C' are both acute, hence in this case $\angle C = \angle C'$

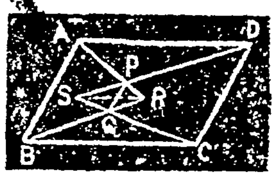
(ii) If $c = b$, as shown Fig (ii) then $c' = b'$, and hence $\angle C = \angle B$, and $\angle C' = B'$

∴ $\angle s$ C, C' are both acute, hence in this case also $\angle C = \angle C'$

(iii) If c is greater than b, as shown in Fig. (iii) then c' is greater than b'; and hence $\angle s$ C, C' are greater than $\angle s$ B, B' respectively

∴ Of the $\angle s$ C, C', they may be both acute or both obtuse (and hence equal), or one acute and the other obutuse (and hence supplementary).

7. Let $ABCD$ be a parlm, and P, Q two points in a straight line parl to AB, also let PA and QB meet at R, and PD and QC at S.



It is required to prove that RS is parl. to AD

Since PQ is parl. to AB, the $\triangle s$ PQR, ABR are similar

∴ $PR : AR = PQ : AB$

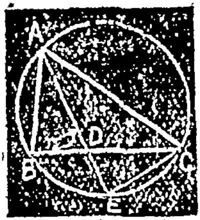
Again since PQ is parl to CD, the $\triangle$s PQS, CSD are similar

$PS:SD=PQ:CD=PQ:AB$

$\therefore PR:AR=PS:SD$

$\therefore RS$ is parallel to AD (Th. 60)

3 Let ABC be a triangle and let the bisector of the vertical $\angle A$ meet the base BC at D and the circum-circle at E. EC be joined, *it is required to prove that* $\triangle$s BAD, EAC *are similar and that* $AB \cdot AC=AE \cdot AD$



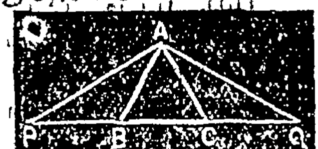
Since $\angle BAD=\angle CAE$, and $\angle ABD=\angle AEC$ in the same segment, hence the third angles of the $\triangle$s BAD, EAC are also equal *viz* $\angle ADB=\angle ACE$

$\triangle$s BAD,EAC are similar,

and $\therefore AB:AD=AE:AC$, so that $AB \cdot AC=AE \cdot AD$.

Exercises on Page 269

1. Let ABC be an equilateral triangle, each side of which $=a$ Produce BC both ways to the pts P, Q such that $BP=CQ=a$, and join AP, AQ *It is required to proe that* (i) $PQ \cdot PA=PA \cdot PB$. *and* (ii) $PA^2=3a^3$



Since the $\angle ABC=\angle APB+\angle PAB$ (Th, 16.)

$=2\angle APB$ [$\because AB=BP$]

$\therefore$ each of the $\angle$s APB, $PAB=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$

Similarly it may be proved that $\angle AQC=30°$

$\therefore$ In the $\triangle$s APB, APQ because the $\angle P$ is common, and $\angle PAB=\angle AQP=30°$ (*Proved*), hence their third angles are also equal.

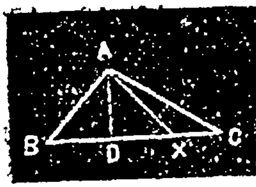
. They are equiangular, and hence the sides about equal $\angle s$ at P must be proportional (Th 62).

(i) $\therefore PQ : PA = PA : PB$.

(ii) And $\therefore PA^2 = PQ \cdot PB$

i.e $PA^2 = 3a \times a$, or $3a^2$ [$\because PQ = PB + BC + CQ = 3a$]

2. Let ABC be a triangle right-angled at A, such that $AB = 3''$ and $AC = 4''$; and let AD be perp to BC. *It is required to find BD and CD.*



Since $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5'$, and $AC^2 = BC \cdot CD$ (Th 66, Cor iii), that is, $9 = 5 \cdot CD$

$\therefore CD = 1.8''$, and $\therefore BD = BC - CD = 5' - 1.8'' = 3.2''$

3. See Figure Ex. 2.

It is required to prove that $BC . AD = AB \cdot AC$

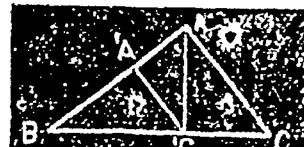
(i) Since the area of the $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD$, also $= \frac{1}{2} AB \cdot AC$ (Th 25)

$\therefore BC . AD = AB . AC.$

(ii) Since the $\triangle s$ ABC, ACD are similar (Th 66), hence the corresponding sides about the equal $\angle s$ ABC CAD must be proportional.

$\therefore AC : BC = AD : AB$, and $\therefore BC . AD = AB . AC$.

4. Let ABC be a triangle right-angled at A, and let AC' be drawn perp to BC From C' draw $C'A'$ parl. to CA. Then if $AC = 15$cm, and $AB = 20$cm, *it is required to shew that* $AC' = 12$cm., *and* $A'C' = 9.6$ cm



$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{225 + 400} = 25 \text{ cm.}$$

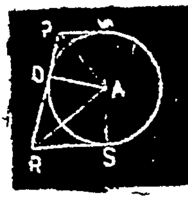
Since the $\triangle$s ACC', ACB are similar (Th. 66), hence the corresponding sides about the equal $\angle$s CAC', ABC must be proportional

$\therefore AC' \; AC = AB.BC$, and $\therefore BC \; AC' = AB \; AC$, or $25 \times AC' = 15 \times 20$ $\therefore AC' = 12$cm.

In the $\triangle$s ACC', $AA'C'$ because $\angle CAC' =$ alt. $\angle AC'A'$, and $\angle AC'C = \angle AA'C'$ (each being right), hence they are equiangular.

$\therefore A'C' \; AC' = AC' \; AC$, and $\therefore AC.\; A'C' = AC'^2$, or $15 \times A'C' = 12 \times 12$, $\therefore A'C' = 9\;6$ cm.

5 Let QAS be a diameter of a circle whose radius $= r$, and let the tangents at Q and S meet any third tangent at O in the pts P and R respectively Join PA, AR, *then shall* (i) *the* $\angle PAR$ *be a right angle and* (ii) $OP \; OR = r^2$.



(i) Since $\angle OAP = \angle QAP$, and $\angle OAR = \angle SAR$ (Th. 47,)

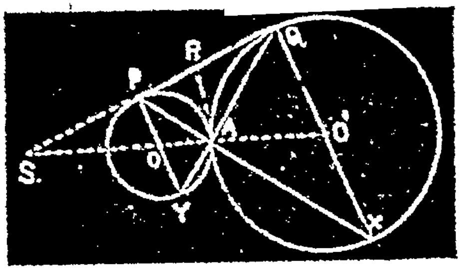
$$\therefore \angle PAR = \angle PAO + \angle RAO$$

$$= \tfrac{1}{2} \angle OAQ + \tfrac{1}{2} \angle OAS = \text{a rt angle} \quad (\text{Th } 1)$$

(ii) Since $\angle AOP$ is a rt angle (Th 46), and the $\angle PAR$ is also a right angle.

In the right-angled $\triangle$ APR, since AO is perp from the right-angle to the hypotenuse, (Th 66)

$$\therefore OP.\; OR = OA^2 = r^2.$$



6 Let two circles whose centres are O, O' and whose radii r and r' respectively have an external contact at A, and let PQ be a common tangent to them. Join PA, QA *then shall* (i) *the* $\angle PAQ$ *be a right angle, and* (ii) $PQ^2=4\,r\,r'$.

(i) Let the common tangent at A meet PQ at R. Then since RP, RA are two tangents from R to the circle O, hence $PR=AR$ Similarly $QR=AR$ (Th 47, Cor)

$\therefore$ $\angle APR=\angle PAR$, and $\angle AQR=\angle QAR$

$\therefore$ $\angle PAQ=\angle APQ+\angle AQP$, and is therefore a rt. angle.

(ii) Produce PA, QA to meet the circumferences at X and Y. Then $\angle PQY=\angle PXQ$ in the alternate segment (Th 49), and $\angle QPX=\angle PYQ$ in the alternate segment. (Th 49)

$\therefore$ the third angles of the $\triangle$s PQX, PQY are also equal, hence they are equiangular, $\therefore PY\ PQ=PQ\ QX$ (Th. 62),

$\therefore PQ^2=PY.\,QX$

$=2\,r\times 2\,r'=4\,rr'$ [$\because$ $\angle$s PAY, QAX are rt. angles]

7. See Figure Ex. 6.

Let QP meet $O'O$ produced meet at S. *It is required to prove that* (i) $\triangle$s SAP, SQA *are similar, and* (ii) $SA^2=SP\ SQ$

Since $\angle PAQ$ is a rt. angle (Proved in Ex. 6), hence $\angle AQP$ is the complement of $\angle APQ$, but $\angle APR$, or $\angle APQ=\angle PAR$, hence $\angle AQP$ is the complement of $\angle PAR$.

Again since $\angle SAR$ is a rt. angle (Th. 46), hence $\angle PAS$ is the complement of $\angle PAR$.

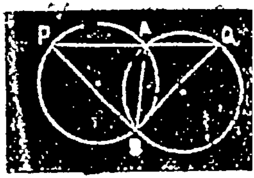
$\therefore \angle PAS = \angle AQP$, or $\angle AQS$.

And the angle at S is common to the $\triangle s$ SAP, SQA, hence their third angles are also equal.

$\therefore$ They are equiangular; and hence similar (Th. 62.)

(ii) $\therefore SP : SA = SA : SQ$; and $\therefore SA^2 = SP \cdot SQ$.

8. Let two circles intersect at A and B; and let the tangents at B meet the circumferences at P and Q. Join AP, AQ, *then it is required to prove that* $AP : AB = AB : AQ$.



Since $\angle ABP = \angle AQB$ in the alternate segment (Th. 49)
and $\angle ABQ = \angle APB$ in the alternate segment (Th. 49.)

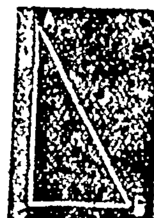
$\therefore$ the third angles of the $\triangle s$ ABP, ABQ are also equal, and hence they are equiangular.

$\therefore AP : AB = AB : AQ$ (Th. 62)

Exercises on page 271.

1. Let ABC be a triangle right angled at C, such that $a = 8$, $b = 15$.

It is required to find c, and the values of Sin A, Cos A, *and* Tan A.



and Tan $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$.

$\therefore$ $\text{Sin} A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{8}{17}$, $\text{Cos} A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{15}{17}$,

and $\text{Tan} A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{8}{15}$.

2. See figure Ex. 1.

If $a = 12$, $b = 35$. *It is required to find c, and the trigono-*

metrical ratios of the smaller angle A.

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{144+1225}=37.$

$\therefore \ \mathrm{Sin}A=\frac{a}{c}=\frac{12}{37}$, $\mathrm{Cos}A=\frac{b}{c}=\frac{35}{37}$, and $\mathrm{Tan}A=\frac{a}{b}=\frac{12}{35}$

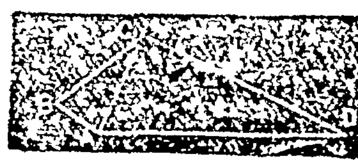
$\mathrm{Cot}A=\frac{b}{a}=\frac{35}{12}$, $\mathrm{Sec.}\,A=\frac{c}{b}=\frac{37}{35}$, and $\mathrm{Cosec}A=\frac{c}{a}=\frac{37}{12}$

3. See figure Ex. 1.

It is required to prove (i) $\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Cos}^2A=1$ *and* (ii) $\mathrm{Sec}^2A=1+\mathrm{Tan}^2A$

(i) Since $a^2+b^2=c^2$, hence dividing each side of the equation by c^2, we have $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$; or $\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Cos}^2A=1.$

(ii) Again since $c^2=a^2+b^2$; hence dividing each side of the equation by b^2, we have $\frac{c^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}+1$; or $\mathrm{Sec}^2A=1+\mathrm{Tan}^2A$.



4 Take a line $AC=3\cdot6$ cm. and draw AB, CD prep. to AC in opposite directions making $AB=1\cdot5$ cm. Join BC, and with centre A and radius $8\cdot5$ cm. draw an arc cutting CD at D. Join AD. Then $ABCD$ is the required quadrilateral.

It is required to find $\mathrm{Sin}ABC$, $\mathrm{Tan}ACB$, $\mathrm{Cos}CDA$, $\mathrm{Tan}DAC$.

Since $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2\cdot25+12\cdot96}=3\cdot9$ cm. [Th. 29]

and $DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{72\cdot25-12\cdot96}=7\cdot7$ cm. ,,

$\therefore \ \mathrm{Sin}ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{3\cdot6}{3\cdot9}=\frac{12}{13}$, $\mathrm{Tan}ACB=\frac{AB}{AC}=\frac{1\cdot5}{3\cdot6}=\frac{5}{12}$

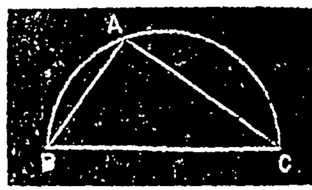
$$\text{Cos}\,CDA=\frac{CD}{AD}=\frac{7\,7}{8\,5}=\frac{77}{85},\quad \text{Tan}\,DAC=\frac{CD}{AC}=\frac{7\cdot 7}{3\,6}=\frac{77}{36}$$

5 See figure Ex 1.

Since $B=90°-A$, $\therefore$ $\text{Sin}(90°-A)=\text{Sin}B=\frac{AC}{AB}=\text{Cos}A.$

$$\text{and Tan }(90-A)=\text{Tan }B=\frac{AC}{BC}=\text{Cot}A.$$

6 *It is required to construct an angle whose sine is 6*



Take a line $BC=10$ units, and describe a semi-circle upon it as diameter With centre B and radius $=6$ units draw an arc cutting the semi-circle at A Join AC, there ACB is the required angle; for $\angle BAC$ is a rt angle (Th 41)

$$\therefore \text{Sin } ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{6}{10}=6$$

7 *It is required to construct an acute angle A if* (i) $\text{Tan}A=7$ (ii) $\text{Cos}A=9$ (iii) $\text{Sin }A=-71$

(i) Take a line $AC=10$ units, and draw CB perp to it making $CB=7$ units Join AB then BAC is the required angle, for $\text{Tan}BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{7}{10}=7$

(ii) Take a line $AB=10$ units, and upon it as diameter describe a semi-circle. With centre A and radius $=9$ units draw an arc cutting the semi-circle at C Join AC, BC; then BAC is the required angle for $\angle ACB$ is right (Th 41)

$$\therefore \text{Cos} BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{10} = 9$$

(iii) Take a line $AB = 100$ units, and upon it as diameter describe a semi-circle With centre B and radius $= 71$ units draw an arc cutting the semi-circle at C, Join BC, then BAC is the required angle for $\angle ACB$ is right (Th 41)

$$\therefore \quad \text{Sin}\, BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{71}{100} = .71.$$

Measure the angles obtained in cases (i), (ii), (iii), and notice that they $= 35°$, $26°$, $45°$ respectively

8. See fig. Ex. 7 (i).

Construct an angle A such that Tan $A = 1{\cdot}6$, as in the last exercise case (i)

Measure the $\angle A$ and notice that it $= 58°$

Since Tan $A = \dfrac{BC}{AC} = 1{\cdot}6$, hence $BC = 1{\cdot}6\, AC$

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{AC^2 + 2\,56 AC^2} = 1\,9\, AC$, (nearly)

$\therefore$ Cos $A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{1\,9} = {\cdot}53$ nearly

9. *It is required to prove that* (i)

Sin $45° =$ Cos $45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *and* (ii)

Sin $60° =$ Cos $30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(i) Let ABC be an isosceles triangle right angled at C Then each of the $\angle s\, ABC, BAC = 45°$, and $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2BC^2$,

$$\therefore \frac{BC^2}{AB^2} = \tfrac{1}{2}, \text{and } \therefore \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Since Sin $A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, and Cos B$=\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Sin 45°$=$ Cos 45° $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) Let ABC be an equilateral, triangle and AD perp. from A on BC. Then $\angle ABD = 60$, and $\angle BAD = 30°$

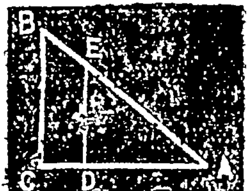
Since $AD^2 = AB^2 - BD^2 = BC^2 - BD^2 = 4BD^2 - BD^2 = 3BD^2$, and $AB^2 = BC^2 = 4BD^2$

$\therefore \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{3BD^2}{4BD^2} = \frac{3}{4}$, and $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Since Sin $ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, and Cos $BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sin 60°$=$ Cos 30°$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

10 Construct an acute angle A such that Tan A = ·81 as in Ex 7 (i); and from one of its arms cut off $AB = 10$ cm.



From B draw BC perp. to the other arm of the $\angle A$. Then ABC is the required right angled triangle, for the hypotenuse $AB = 10$ cm, Tan $A =$ ·81

Measure AC, and the $\angle A$, and notice that $AC = 7.8$ cm and $\angle A = 39°$

Since $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 7.8^2} = 6.3$ cm.

$\therefore$ Sin $A = \frac{BC}{AB} = \frac{6.3}{10} = \cdot 63$, and Cos $A = \frac{AC}{AB} = \frac{7.8}{10} = \cdot 78$.

11. See figure Ex. 10.

Construct an acute angle A such that Tan $A = .7$, and from one of its arms cut off $AC = 2.8$ cm.

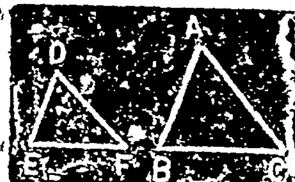
ABC draw a perp. to AC meeting the other arm of the $\angle A$ at B. Then ABC is the required rt. angled triangle, for $\angle C=90^\circ$, $b=2.8$ cm and Tan $A=\cdot 7$.

Measure AB, and the $\angle A$, and notice that $AB=3.4$ cm, and the $\angle A=35^\circ$.

Exercises on Page 273.

1. See solution given in your text book.

2. Let ABC, DEF be two equiangular triangles having AB corresponding to DE, BC to EF and CA to FD. *It is required to prove that* $AB:BC:CA=DE:EF:FD$.



Since $\dfrac{BC}{\operatorname{Sin}A}=\dfrac{CA}{\operatorname{Sin}B}=\dfrac{AB}{\operatorname{Sin}C}$; and $\dfrac{EF}{\operatorname{Sin}D}=\dfrac{FD}{\operatorname{Sin}E}=\dfrac{DE}{\operatorname{Sin}F}$ [Ex. 1]

Alternately $BC:CA:AB=\operatorname{Sin}A:\operatorname{Sin}B:\operatorname{Sin}C$,

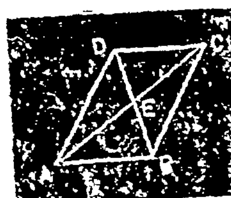
and $EF:FD:DE=\operatorname{Sin}D:\operatorname{Sin}E:\operatorname{Sin}F$.

But $A=D$, $B=E$, $C=F$, $\therefore \operatorname{Sin}A=\operatorname{Sin}D$, $\operatorname{Sin}B=\operatorname{Sin}E$, $\operatorname{Sin}C=\operatorname{Sin}F$

$\therefore AB:BC:CA=DE:EF:FD$.

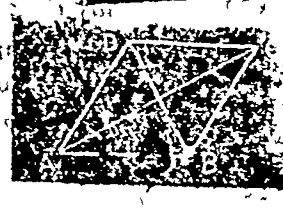
3. See solution given in your text book.

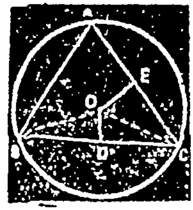
4. (i) Let a, b be two adjacent sides of a parallelogram $ABCD$, and B the included angle. *It is required to find its area.*



Draw the diagonal AC, then the area of $ABCD=2$ the area of the $\triangle ABC=ab\operatorname{Sin}B$ (Ex. 3)

(ii) Since rhombus is a parallelogram whose adjacent sides are equal, hence if a be one side and A one angle given, then its area $=a^2\operatorname{Sin}A$ [from case (i)]





5 Let O be the centre of the circum-circle of the $\triangle$ ABC Draw OD perp. to BC, and join OC, OB Then

$$\text{Sin } BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{2\,BD}{2\,OB} = \frac{a}{2R} \quad \therefore \quad R = \frac{a}{2 \text{ Sin } BOD}$$

But $\angle\, BOD = \frac{1}{2} \angle\, BOC = \angle\, BAC$ (Th 38)

$$\therefore R = \frac{a}{2 \text{ Sin } BAC} = \frac{a}{2 \text{ Sin } A} \text{ (i).}$$

Again if $\triangle$ denotes the area of the $\triangle$ ABC, then

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \text{ Sin } A \text{ (Ex 3)}, \therefore \text{ Sin } A = \frac{2\triangle}{bc}$$

$$\therefore \frac{a}{2 \text{ Sin } A} = \frac{abc}{4\triangle} \text{ (ii)}$$

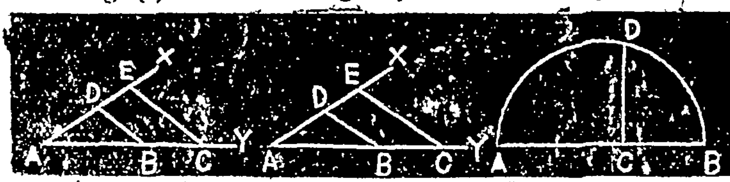
From (i) and (ii) we have $R = \dfrac{a}{2 \text{ Sin } A} = \dfrac{abc}{4\triangle}$

6 See solution given in your text book

Exercises on Page 278

1 Let AX, AY be any two st lines of indefinite length

Fig. (i) Fig (ii) Fig. (iii)



containing any convenient angle between them

(i) From AY cut off $AB = 2\ 4''$, and $BC = 1\ 5''$, and from AX cut off $AD = 1\ 6''$

Join BD, and draw CE parl to BD meeting AX in E. Then DE is the fourth proportional to AB, BC, and AD (Prob 35)

Measure DE, and notice that it $= 1''$

Arithmetically. $2{\cdot}4'' : 1{\cdot}5'' :: 1{\cdot}6'' : x''$,

whence $2{\cdot}4 \times x = 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}6$, or $x = 1''$

(ii) From AY cut off $AB = 2{\cdot}5''$ and $BC = 1{\cdot}5''$; and from AX cut off $AD = 1{\cdot}5''$.

Join BD, and draw CE parl. to BD meeting AX in E. Then DE, is the third proportional to AB and BC (Prob. 36)

Measure DE, and notice that it $= {\cdot}9''$

Arithmetically $2{\cdot}5'' : 1{\cdot}5'' :: 1{\cdot}5'' : x''$

whence $2{\cdot}5 \times x = 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$, or $x = {\cdot}9''$

(iii) Take a st. line $AC = 7{\cdot}2$ cm, and produce it to B making $CB = 5$ cm. Upon the diameter AB describe a semi-circle, and draw CD perp to AB meeting the semi-circle in D.

Then CD is the mean proportional between AC and CB (Prob 38.)

Measure CD, and notice that it $= 6$ cm.

Arithmetically. $7{\cdot}2 : x :: x : 5$

whence $x^2 = 7{\cdot}2 \times 5 = 36$, or $x = 6$ cm

2 Take a line $AB = 2''$, and draw a line AZ of indefinite length making any convenient angle with AB. From AZ cut off $AD = 7$ units; and from DZ, DA cut off DC, DE each $= 3$ units.

Join BC, BE, and draw DX, DX' parl to BC, BE meeting AB and AB produced in the pts. X and X' respectively. Then AB is divided internally at X and externally at X' in the ratio 7 3 (Prob 37.)

Measure AX, BX; and AX', BX', and notice that $AX = 1{\cdot}4''$, $BX = {\cdot}6''$, $AX' = 3{\cdot}5''$ and $BX' = 1{\cdot}5''$.

Since $AC = AD + DC = 7 + 3 = 10$, and $AB.AX = AC.AD$, or $2AX = 10.7$ $\therefore$ $AX = 1{\cdot}4''$, and $\therefore$ $BX = AB - AX = 2 - 1{\cdot}4'' = {\cdot}6''$

Again since $AE = AD - DE = 7 - 3 = 4$, and $AX' \cdot AB = AD \cdot AE$, or $AX' \cdot 2 = 7 \cdot 4$, whence $AX' = 3.5''$, and $\therefore$ $BX' = AX' - AB = 3.5'' - 2'' = 1.5''$

3. See fig. Ex. 1.

In Ex 1, Fig (i) make $AB = 1''$, $BC = 1.6''$, and $AD = 1.25''$, then DE will represent x and will measure $2''$

Arithmetically $x \times 1 = 1.25 \times 1.6$, whence $x = 2''$

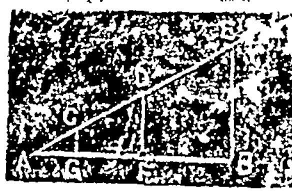
In Ex 1, Fig (ii) make $AB = 6.3$ cm, and BC, AD each $= 4.2$ cm, then DE will represent x and will measure 2.8 cm

Arithmetically $6.3 \times x = 4.2 \times 4.2$, whence $x = 2.8$cm

In Ex. 1, Fig (iii) make $AC = 1.6''$ and $CB = 2.5''$, then CD will represent x, and will measure $2''$

Arithmetically $x^2 = 1.6 \times 2.5 = 4$, whence $x = 2''$

4 Make a line $AB = 7.2$ cm, and draw a line AX of indefinite length making any convenient angle with AB. From AX cut off AC, CD, $DE = 2$, 3 and 4 units of length respectively



Join BE, and draw CG, DF each parl to BE meeting AB in the pts G and F. Then AB is divided at G and F into segments proportional to 2, 3, and 4 [Prob. 37, Cor]

Measure these parts, and notice that $AG = 1.6$ cm, $GF = 2.4$ cm, and $FB = 3.2$cm.

Since $AC = 2$, $AD = 5$, and $AE = 9$ units of length; and $AB \cdot AG = AE \cdot AC$ or $7.2 \cdot AG = 9 \cdot 2$,

$9AG = 7.2 \times 2$, whence $AG = 1.6$ cm

Again since $AB \cdot AF = AE \cdot AD$, or $7.2\ AF = 9 \cdot 5$,

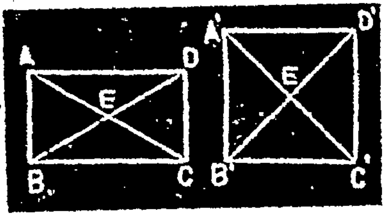
$\therefore$ $9AF = 5 \times 7.2$, $\quad AF = 4$, and $\therefore$ $GF = AF - AG = 4 - 1.6 = 2.4$ cm

$BF = AB - AF = 7.2 - 4 = 3.2$ cm

5 See fig. Ex. 4

Because the second part $= \frac{2}{3}$ of the first, and the third $= \frac{3}{4}$ of the second, hence the first : the second : the third $= 6 : 4 : 3$. Hence take a line $AB = 3·9''$, and divide it into three parts proportional to 6, 4, 3. [as in Ex. 4]

6. Let $A'B'C'D'$ be a given square on a side $A'B' = 2''$. *It is required to construct a rectangle ABCD on a side $AB = 1·5''$ such that it may be equal in area to the sq $A'B'C'D'$.*



Draw AD, BC perp to AB making each = the 3*rd* proportional to AB and $A'B'$, and join CD.

Then $ABCD$ is the required rectangle, for $AB : A'B' = A'B' : BC$ when $AB.BC = A'B'^2$, *that is* the rect $ABCD$ = the sq $A'B'C'D'$.

$$BC = \frac{A'B'^2}{AB} = \frac{2 \times 2}{1·5} = 2·7'' \text{ nearly}$$

Measure BC, and notice that it $= 2·7''$

7. (i) Find the mean proportional between 3 and 1 [as in Ex. 1 (iii)], then it will represent graphically the value of $\sqrt{3}$.

For if $3 : x = x : 1$, then $x^2 = 3 \times 1$, whence $x = \sqrt{3}$

(ii) Find the mean proportional between 5 and 2 as above, then it will represent graphically the value of $\sqrt{10}$

(iii) Find the mean proportional between 2 and $\frac{7}{5}$, or 2 and 1.4, then it will present graphically the value of $\sqrt{\frac{14}{5}}$

8. See fig Ex. 1

(i) Find the fourth proportional to 2·8, 3·5, and 2·4 [as in Ex. 1, (i)], then it will represent the required value, for if

it $=x$, then $2\ 8 \cdot 3\ 5 = 2 \cdot 4\ x$, whence $x = \dfrac{3 \cdot 5 \times 2\ 4}{2\ 8} = 3$

Measure the fourth proportional thus found, and notice that it $=3$

(ii) Since $\dfrac{6\ 84}{2\ 13} = \dfrac{6\ 84 \times 1}{2 \cdot 13}$, hence find the fourth proportional to $2\ 13$, $6 \cdot 84$ and 1; then it will represent the required value as in case (i)

(iii) Find the fourth proportional to $1\ 51$, $2\ 71$ and $1 \cdot 26$, then it will represent the value of $\dfrac{2\ 71 \times 1\ 26}{1\ 51}$ as in case (i)

9. Fig (i) Fig (ii) Fig (iii)

(i) Since $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5}$, hence $a\ b\ c = 3\ 4.5$

Take a line $DE = 4 \cdot 8''$, and divide it at B and A in three parts proportional to the numbers 3, 4 and 5

With centres B and A, and radii BD and AE respectively draw two arcs intersecting at C Join CA, CB, then ABC is the required triangle

Measure the sides, and notice that $a = 1 \cdot 2''$, $b = 1\ 6''$ & $c = 2''$

By *calculation* $\dfrac{a}{3} = \dfrac{a+b+c}{3+4+5} = \dfrac{4\ 8}{12}$, hence $a = \dfrac{4\ 8 \times 3}{12} = 1\ 2''$

Similarly $\dfrac{b}{4} = \dfrac{4\ 8}{12}$, and $\dfrac{c}{5} = \dfrac{4\ 8}{12}$, hence $b = 1\ 6''$, and $c = 2''$

(ii) Because $a = \dfrac{5}{6} b$, $b = \dfrac{4}{5} c$, hence $a\ b\ c = 10\ 12\ 15$

∴ Construct a triangle ABC whose perimeter $= 11\ 1$ cm and $a.b\ c = 10\ 12\ 15$ as in case (i)

Measure the sides, and notice that $a=3$ cm, $b=3.6$ cm, $c=4.5$ cm verify your results by *calculation* as in case (i)

(iii) Since $\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{3}=\frac{A+B+C}{1+2+3}=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$,

$\therefore A=30^\circ, B=60^\circ$, and $C=90^\circ$

Take a line $DE=11.8$ cm At the pts. D and E make the angles equal to 15° and 45° respectively with their arms meeting at B.

At the pt. B make the $\angle DBA=\angle EDB=15^\circ$, and $\angle EBC=\angle DEB=45^\circ$ Then ABC is the required triangle

For $\angle A=\angle ADB+\angle DBA=15^\circ+15^\circ=30^\circ$, and $\angle C=\angle CEB+\angle EBC=45^\circ+45^\circ=90^\circ$; hence the third $\angle B=60^\circ$.

Measure the sides, and notice that $a=2.5$ cm., $b=4.3$ cm, $c=5$ cm Since ABC is a rt angled triangle having $\angle A=30^\circ$ and $\angle B=60^\circ$, hence $a=\frac{1}{2}c$, and $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$, and $\therefore a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$

$\therefore$ The lengths of the sides a, b, c can be known by *calculation* as in case (i)

(iv) Draw any two lines DE, DC at right angles to each other, making $DE, DC=3$ and 5 units of length respectively

Join CE, and produce it to B making $CB=4''$ From B draw BA perp to CD produced Then ABC is the required triangle

For $\angle A=90^\circ$, the side $BC=4''$, and $AC : AB=DC : DE=5:3$

Measure the sides b, c, and notice that $b=3.4''$, and $c=2.1''$

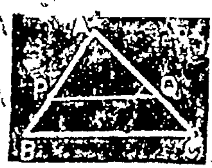
By *calculation* since $b:c=5:3$, hence $c=\frac{3}{5}b$, $\therefore c^2=\frac{9}{25}b^2$ and since $b^2+c^2=a^2$, $\therefore b^2+\frac{9}{25}b^2=16$, or $\frac{34}{25}b^2=16$

$$\therefore b^2=\frac{16\times 25}{34}, \therefore b=\frac{4\times 5}{\sqrt{34}}=3.4'',$$

$$\text{and } \therefore c=\frac{3}{5}b=\frac{3}{5}\times 3.4''=2.1''.$$

Exercises on page 279.

1. Construct a $\triangle$ ABC in which $a=8$ cm, $b=5\cdot6$ cm, $c=6\cdot4$ cm. Then the $\triangle$ ABC represents the field.



If a represents 200 metres, then since $a:b=8:5\cdot6$, and $a:c=8:6\cdot4$

$$\therefore\ b=\frac{5\cdot6}{8}a=\frac{5\cdot6}{8}\times200=140\text{ m.,}$$

$$\text{and } c=\frac{6\cdot4}{8}a=\frac{6\cdot4}{8}\times200=160\text{ m}$$

(ii) From AB cut off $AP=4$cm, and draw PQ parl to BC. Then PQ represents the length of the fence.

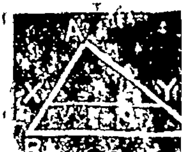
Since the $\triangle$s APQ, ABC are similar $\therefore AP:AB=PQ:BC$

$$\therefore\ PQ=\frac{AP.BC}{AB}=\frac{4\times8}{6\cdot4}=5$$

Again since BC represents 200 m, and $PQ:BC=5:8$

The real length of the fence $=\frac{5}{8}\times200=125$m.

2. Take any st line $AB=8$ units of length, and from it cut off $AX=7$ units of length. Hence while A travels the distance AB, B travels only AX, therefore BX represents the distance by which A beats B in a race of 8 unit of length.

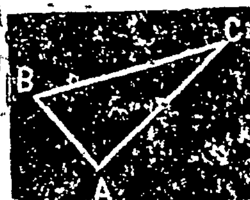


At the pt A make any convenient angle BAC, and let A represent 100 yards. Join BC, and draw XY parl to BC meet AC in Y. Then CY represents the distance by which beats B in a 100 yards race.

Since $AX:AB=AY:AC$ [Th. 62], and $AX:BX=AY:CY$ [Th. 62

$\therefore AB.BX = AC.CY, \therefore CY = \dfrac{BX.AC}{AB} = \dfrac{1 \times 100}{8.05} = 12\frac{1}{2}$ yds

3. From any pt A draw AB, AC in a N.W. and N.E. directions, making $AB = .8''$, and $AC = 1.5''$, and join BC.

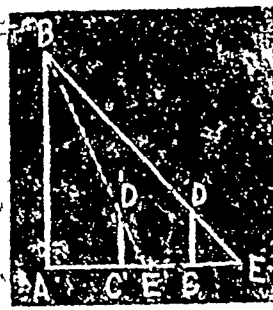


Since the $\angle A$ is a rt. angle,

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{.64 + 2.25} = 1.7''$

$\therefore$ In the scale of 1" to 25 miles, BC would represent 1.7×25, or $42\frac{1}{2}$ miles.

4. (i) Let AB represent a lamp-post, and CD a man whose height is 6 ft. standing at a distance of 32 ft from AB. Join BD and produce it to meet AC produced in E. Then CE represents the shadow of the man, and is equal to 8 ft.



It is required to find the height of AB.

Since $AE = AC + CE = 32 + 8 = 40$ ft., and the $\triangle$s ABE, CDE are similar

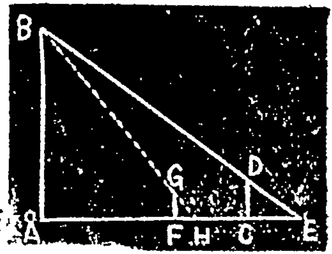
$\therefore AB.CD = AE.CE$, whence $AB = \dfrac{AE.CD}{CE} = \dfrac{40 \times 6}{8} = 30$ ft.

(ii) Let $C'D'$ represent a boy 5ft. high standing at a distance of 20 ft. from AB. Join BD', and produce it to meet AC' produced in E'. Then $C'E'$ represents the shadow of the boy. *It is required to find C'E'.*

Since the $\triangle$s $ABE', C'D'E'$ are similar,

$\therefore AB.C'D' = AE'.C'E'$, and $\therefore (AB - C'D').C'D' = (AE' - C'E').C'E'$
$= AC'.C'E'$

$\therefore C'E' = \dfrac{AC'.C'D'}{(AB - C'D')} = \dfrac{20 \times 5}{(30 - 5)} = \dfrac{100}{25} = 4$ ft.



5. (*i*) Let AB represent a lamp-post, and CD a man 6 ft high standing 15 ft from the post Join BD and produce it to meet AC produced in E Then CE represents the shadow of the man, and ∴ CE = 5 ft *It is required to find the height of* AB.

Since $AE = AC + CE = 15 + 5 = 20$ ft., and the △s ABE, CDE are similar

∴ $AB \; CD = AE \; CE$, whence $AB = \frac{AE \; CD}{CE} = \frac{20 \times 6}{5} = 24$ ft

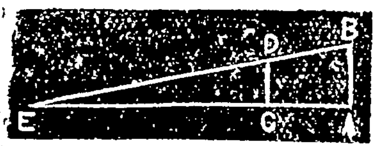
(*ii*) Let FG represent the man when he has approached 8 ft nearer to the post. $AF = AC - CF = 15 - 8 = 7$ ft.

Join BG, and produce it to meet AF produced in H, then FH represents the shadow of the man in the new position *It is required to find FH*

Since the △s ABH, FGH are similar,

∴ $AB \; FG = AH \; FN$, and ∴ $(AB - FG) \; FG = (AH - FH) \; FH = AF \; FH$

∴ $FH = \frac{AF \; FG}{(AB - FG)} = \frac{7 \times 6}{24 - 6} = \frac{42}{18} = 2$ ft 4 in



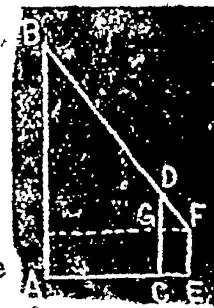
6. Let CE represent the breath of the canal, and CD the visible portion of the rod fixed vertically on the bank then $CD = 4\frac{1}{2}$ ft.

Let AB represent the observer, whose eye is 5ft 8 in above the ground, and when he has retired a distance AC at right-angles from the canal until D,E appear to be in one st line to him If $AC = 20$ft, *it is required to find CE*

Since the △s ABE, CDE are similar,

$\therefore$ $AB : CD = AE : CE$, and $\therefore (AB-CD) : CD = (AE-CE) : CE = AC : CE$

$$\therefore\ CE = \frac{AC.CD}{AB-CD} = \frac{20\times 4\frac{1}{4}}{5\frac{2}{3}-4\frac{1}{4}} = 60\text{ft}$$



7. Let AB represent the tower, and CD a staff 12ft high fixed vertically in the ground at a distance of $AC=27$ ft from the tower.

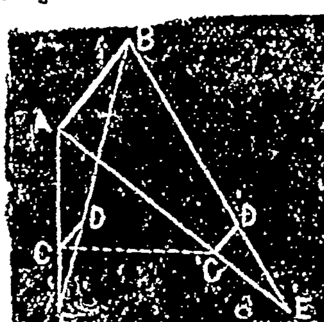
Also let EF represent the man 5ft. 4 in high, when he has retired a distance of $CE=3$ ft farther from the tower, and from where he sees B and D in the same st line. *It is required to find AB*

From F draw FGH parl. to AE cutting CD at G, and AB at H. Then $DG=CD-CG=CD-EF=12-5\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}$ ft, and $FH=AE=AC+CE=27+3=30$ft

Since the $\triangle$s FGD, FBH are similar,

$$\therefore FG : FH = GD : BH, \qquad BH = \frac{FH.GD}{FG} = \frac{30\times 6\frac{2}{3}}{3} = 66\frac{2}{3}\text{ ft}$$

$$\therefore AB = BH + AH = BH + EF = 66\tfrac{2}{3} + 5\tfrac{1}{3} = 72\text{ ft}$$



8. Let AB represent the lighthouse, and CD a man 6 ft. high standing due south of the house Join BD, and produce it to meet AC produced in E Then CE represents the shadow of the man, and is therefore equal to 24 ft

From C draw CC' perp. to AC towards the east, making $CC'=100$ yards$=300$ ft Let $C'D'$ represent the new position of the man Join BD', and produce it to meet AC' produced in E' Then $C'E'$ represents the shadow of the man in the new position, and is therefore equal to 30 ft

It is required to find AB

Let $AB=x$, then since the $\triangle$s ABE, CDE are similar

$\therefore AB:CD=AE:CE$, and $\therefore CD\cdot AE=AB\cdot CE$, or $6\,AE=24x$,

$\therefore AE=4x$

Again because the $\triangle$s ABE', $C'D'E'$ are similar

$\therefore AB:C'D'=AE':C'E'$, and $\therefore C'D'\cdot A'E'=AB\cdot C'E'$, or $6\,AE'=30x$, or $AE'=5x$

$\therefore AC=AE-CE=4x-24$, and $AC'=AE'-C'E'=5x-30$

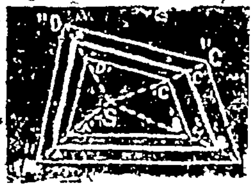
$\therefore AC'^2-AC^2=(5x-30)^2-(4x-24)^2=(9x-54)(x-6)=9(x-6)^2$

And since the $\angle ACC'$ is a rt angle, $\therefore AC'^2-AC^2=CC'^2=300^2$

$\therefore 9(x-6)^2=300^2$, or $3(x-6)=300$, or $x-6=100$, $\therefore x=106$ ft

Exercises on page 284.

F 16



1 Take a line $AB=6.5$ cm, and at the pts. A and B make the $\angle$s BAD, $ABC=80°$ and $70°$ such that $AD=4.4$ cm and $BC=3.2$ cm respectively. Join CD, then $ABCD$ is the required quadrilateral.

(ii) Take any convenient pt S, and join SA, SB, SC, SD. Divide SA *internally* at A' in the ratio 3:4.

From A' draw $A'B'$ parl to AB meeting SB in B',

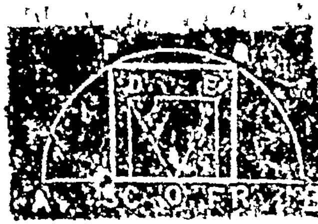
From B' draw $B'C'$ parl. to BC meeting SC in C',

and from C' draw $C'D'$ parl. to CD meeting SD in D', and join AS'

Then $A'B'C'D'$ is the reduced copy of $ABCD$ such that the ratio of each side of $A'B'C'D'$ to the corresponding side of $ABCD$ is 3:4.

(iii) Divide SA *externally* at A'' in the ratio 5:4, and complete the figure $A''B''C''D''$ as in case (i)

Then $A'B'C'D'$ is the enlarged copy of $ABCD$ such that the ratio of each side of $A'B'C'D'$ to the corresponding side of $ABCD$ is 5 : 4.



2. Draw a semi-circle upon any line AB as diameter. *It is required to describe a square in it, so that two vertices may be on the arc, and the other two on AB.*

Bisect AB at O, and take any two points C, F at equal distances from O, and on either side of it. On CF describe a square $CDEF$.

Join OD, OE, and produce them to meet the arc in the pts. P and Q. Join PQ, and draw PS, QR perp to AB. Then $PQRS$ is the required square [*Prob.* 39, *p.* 28.]

(ii) If $AB=2r$, and the side of the sq $PQRS=a$, *then shall* $5a^2=4r^2$.

Because $OP^2=PS^2+OS^2$, or $r^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$, $\therefore 4r^2=5a^2$.

3. Draw an $\angle AOB=60°$, such that each of its arms OA, $OB=2{\cdot}4''$. *It is required to inscribe a square in the sector OAB.*

Take any pt C in OA, and from OB cut off $OF=OC$. Join CF, and on CF describe a sq $CDEF$.

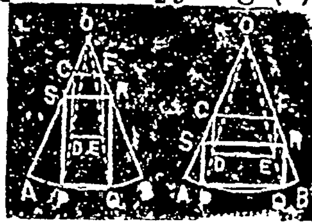
Join OD, OE, and produce them to meet the arc in the pts. P and Q. Join PQ, and draw PS, QR each parl to OD, meeting OA, OB in the pts S and R respectively. Join SR, then $PQRS$ is the required square [*Prob.* 39, *p* 28.]

Measure PQ, and notice that it$=1{\cdot}25''$.

If a be the side of the square and r the radius of the sector,

Then $a : r = PQ : OA = 1.25 : 2.4 = 0{\cdot}52$

Fig (i) R F. $\frac{9}{25}$ Fig. (ii)



4. Draw an $\angle AOB = 45°$, such that each of its arms $OA, OB = 5$ cm. *It is required to inscribe in the sector OAB a rectangle having its adjacent sides in the ratio 2 : 1.*

Take any pt C in OA, and from OB cut off $OF = OC$. Join CF, and draw CD perp to CF, making $CD = 2\ CF$ [as in Fig (i)], and $CD = \frac{1}{2}\ CF$ [as in Fig (ii)], and complete the rectangle $CDEF$.

Then the ratio of the adjacent sides of the rect $CDEF$ is in each figure as 2:1

Join OD, OE, and produce them to meet the arc in the pts P and Q. Join PQ, and draw PS, QR each parl to CD meeting OA, OB in the pts S and R respectively. Join SR, then $PQRS$ is the required rectangle in each of the Figs. (i) and (ii) [*Prob 39, p 283*]

Thus it is clear that two such rectangles can be drawn. Measure PQ in Fig. (i), and PS in Fig (ii), and compare them. You will find them in the ratio 31 : 28 nearly

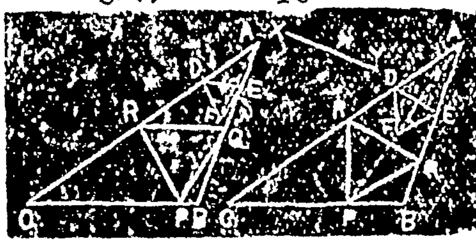
R. F. $\frac{3}{10}$

5. Construct a $\triangle ABC$ having $a = 8$ cm, $b = 7$ cm., and $c = 6$ cm [Prob 8]. *It is required to inscribe a square in $\triangle ABC$ such that two of its angular points may be in BC, and the other two in AB, AC.*

Take any pt. G in AB, and draw GF parl. to BC meeting AB in F. On GF describe a square $GDEF$

Join AD, AE, and produce them to meet BC in the pts. P and Q. From P and Q draw PS, QR each perp. to BC meeting AC in S and AB in R, and join SR. Then $PQRS$ is the required square [*Prob. 30, p 283*].

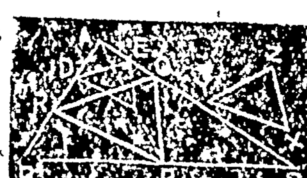
Fig, (i) R. F $\frac{3}{10}$ Fig (ii)



6 Take a line $AB = 2.6''$, and at the pts. B and C make the $\angle s$ CBA, BCA $= 110^\circ$ and 35° respectively, with their arms meeting at A. *It is required to inscribe in $\triangle ABC$ an equilateral triangle having (i) one side parl. to BC, and (ii) one side parl. to any given st line XY.*

Take any pt D in AC, and draw DE parl. to BC [as in Fig, (i)] and DE parl. to XY [as in Fig (ii)] meeting AB in E. On DE describe an equilateral $\triangle DEF$.

Join AF, produce it to cut BC in P. From P draw PQ, PR parl. to FE, FD meeting AB, AC in the pts Q and R respectively. Join QR, then PQR is the required equilateral triangle in both the Figs (i) and (ii). [*Prob. 39 p 283*]



7. Let ABC, XYZ be any two given triangles *It is required to inscribe in the $\triangle ABC$ a triangle similar to the $\triangle XYZ$.*

In AB take any pt. D, and draw DE parl to YZ meeting AC in E. From D and E draw DF, EF parl. to XY, XZ respectively, with

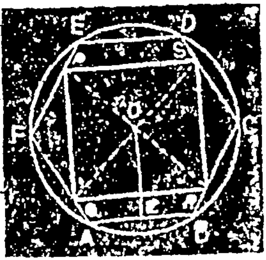
their arms meeting in F. Then $\triangle DEF$ is similar to $\triangle XYZ$.

Join AF, and produce it to meet BC in P. From P draw PQ, PR parl. to FE, FD meeting AC, AB in the pts. Q & R respectively. Join QR, then PQR is the required triangle [*Prob* 38, p. 283.]

It can be done in *three* ways, according as DE corresponds to XY, YZ or ZX.

R. F.

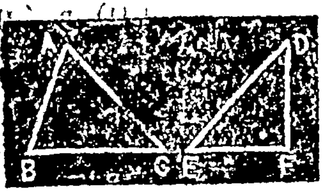
8. With any point O as centre and radius $= 1.2''$ draw a circle, and place the chords AB, BC, CD, DE and EF each $=$ $1.2''$ and join AF. *It is required to inscribe in the hexagon $ABCDEF$ a square having two sides parl. to AB and DE, and its vertices on the remaining sides of the hexagon.*



Draw OZ perp. to AB, and draw the st. lines PCR, QCS on the opp. sides of OZ, each making an angle $= 45°$ with it, and meeting EF, FA, BC, CD in the pts. P, Q, R, S respectively. Join PQ, QR, RS and SP. Then $PQRS$ is the required square.

Exercises on page 287

1. Let ABC, DEF be two triangles of equal altitude standing on the bases BC, EF of $6.3''$ and $5.4''$ respectively. If the area of $\triangle ABC = 12\frac{1}{4}$ sq. in. *it is required to find the area of $\triangle DEF$.*



Since $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$ (Th. 70) $= 6.3 : 5.4$

$\therefore \triangle DEF = \dfrac{EF \times \triangle ABC}{BC} = \dfrac{5.4 \times 12\frac{1}{4}}{6.3} = \dfrac{12}{2} = 10\frac{1}{2}$ sq in

2. See figure Ex. 1.

Let ABC, DEF be two triangles of equal altitude Then if $\triangle ABC, \triangle DEF = 24.17$, and if $BC = 4{\cdot}2$ cm, *it is required to find EF.*

Since $BC\ EF = \triangle ABC\ \triangle DEF$ (Th 70) $= 24{:}17$

$\therefore EF = \dfrac{17.BC}{24} = \dfrac{17 \times 4{\cdot}2}{24} = 2{\cdot}9 = 3{\cdot}0$ cm *nearly*

3. See figure Ex. 1.

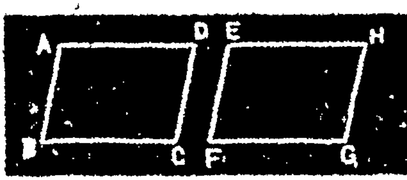
Let ABC, DEF be two triangles lying between the same parallels.

Then if $BC = 20\ 7$ m., $EF = 16\ 2$ m., and area of the $\triangle DEF$ is $50\ 1204$ sq m., *it is required to find the area of $\triangle ABC$.*

Since $\triangle ABC\ \ \triangle DEF = BC \cdot EF$ [Th 70] $= 20{\cdot}7 : 16{\cdot}2$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{20{\cdot}7 \times \triangle DEF}{16{\cdot}2} = \dfrac{20\ 7 \times 50{\cdot}1204}{16\ 2} = 64$ sq m. *nearly.*

4. Let $ABCD$, $EFGH$ be two parms. whose areas are in the ratio 2 1.3 5, and which lie between the same parallels

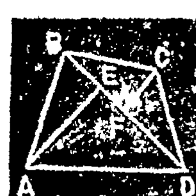


If $BC = 6{\cdot}6''$, *it is required to find FG*

$BC.FG =$ parlm AC parlm. EG [Th 70] $= 2{\cdot}1 : 3{\cdot}5$

$\therefore FG = \dfrac{3{\cdot}5 \times BC}{2\ 1} = \dfrac{3\ 5 \times 6{\cdot}6}{2\ 1} = 11''$

5. Let ABD, CBD represent two triangular fields upon the same base BD, and on the opp sides of it. Draw AE, CF perp. to BD Then if $AE = 1\ 2$ chains, $CF = 3\ 71$ chains and area of the field $ABD = 18$ acres, *it is required to*



find the area of the whole quadl ABCD

Since $\triangle\ ABD = \frac{1}{2}\ BD.AE = \frac{1}{2}\ BD \times 4{\cdot}2 = 2\ 1\ BD,$

and $\triangle\ CBD = \frac{1}{2}\ BD\ CF = \frac{1}{2}\ BD \times 3\ 71 = 1\ 855\ BD$

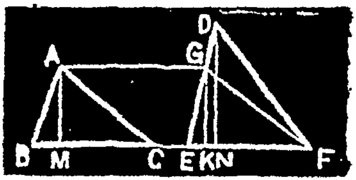
$\therefore\ \triangle\ ABD\quad \triangle\ CBD = 2\ 1\ BD\quad 1{\cdot}855\ BD = 60,\ 53$

$\therefore\ \triangle\ CBD = \dfrac{53 \times \triangle ABD}{60} = \dfrac{53 \times 18}{60} = 15\ 9$ acres

. area of the quadl $ABCD = \triangle ABD + \triangle CBD$
$= 18 + 15\ 9$, or $33\ 9$ acres

Exercises on page 289.

1. Let ABC, DEF be two triangles on equal bases BC, EF, of which the altitudes are AM and DN respectively *It is required to prove that* $\triangle\ ABC$ $\triangle DEF = AM\ DN$.



Place the two triangles such that their bases are in the same st line $BCEF$, and draw AG parl to BF meeting DE in G Join FG, and draw GK perp to EF Then

(i) Since $\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ AM\ BC$, and $\triangle\ DEF = \frac{1}{2}\ DN\ EF$

$\therefore\ \triangle\ ABC\ \ \triangle DEF = \frac{1}{2}\ AM\ BC, \frac{1}{2}\ DN\ EF = AM{\cdot}DN$ [$BC = EF$]

(ii) Again since the $\triangle s\ GEK, DEN$ are similar,

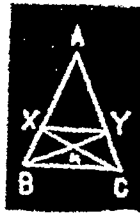
$\cdot\ GE{\cdot}DE = GK\ DN = AM\ DN,$ [$\cdot\ GK = AM$ Th 21]

and since the $\triangle s\ GEF, DEF$ have a common vertex F, and hence the same altitude

$\triangle\ GEF\ \triangle DEF = GE\ DE$ [Th 70]
$= AM\ DN$ *(Proved)*

But $\triangle\ GEF = \triangle ABC$ [Th 26], $\triangle ABC\ \triangle DEF = AM\ DN$

2 Let a st. line XY be drawn parl. to the base BC of the $\triangle ABC$ cutting AB at X, and AC at Y. Join BY, CX, *then it is required to prove that* (i) $AX:XB=AY:YC$, *and* (ii) $AB:AX=AC:AY$.



(i) Since the $\triangle s\ AXY, CXY$ have the common vertex X, and hence the same altitude, $\therefore \triangle AXY:\triangle CXY = AY:CY$ [Th. 70]

Similarly $\triangle AXY:\triangle BXY=AX:BX$ [Th. 70]

But $\triangle BXY=\triangle CXY$ [Th. 26], $\therefore AY:CY=AX:BX$

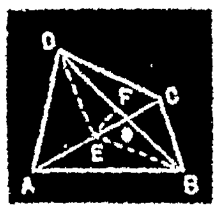
(ii) Since $\triangle ABY:\triangle AXY=AB:AX$ [Th. 70],

and $\triangle ACX:\triangle AXY=AC:AY$ "

also $\triangle BXY=\triangle CXY$ [Th. 26], hence by adding $\triangle AXY$ to each of these equals, we have $\triangle ABY=\triangle ACX$

$\therefore AB:AX=AC:AY$.

3. Let $ABCD$ be a quadrilateral, and let its diagonals AC, BD intersect at O. *It is required to prove that $\triangle s\ ABO$, ADO, BCO, DCO are proportionals.*



Since the $\triangle s\ ABO, ADO$ have the the same altitude,

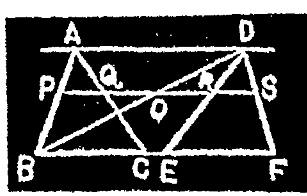
$\therefore \triangle ABO:\triangle ADO=BO:OD$ [Th. 60]

Similarly $\triangle BCO:\triangle DCO=BO:OD$ "

$\therefore \triangle ABO:\triangle ADO=\triangle BCO:\triangle DCO$

$\therefore$ they are proportionals

4. Let ABC, DEF be two triangles on equal bases BC, EF, and between the same parallels AD, BF, also let $PQRS$ be any line parl. to BF cutting



AB, AC in the pts P, Q and DE, DF in the pts R, S respectively *It is required to prove that* $\triangle APQ = \triangle DRS$

Join BD intersecting PS in O Then from the $\triangle ABD$, we have $BP\ AP = BO\ OD$ [Th 60], and . $BP+AP\ AP = BO+OD\ OD$,

or $AB\ AP = BD\ OD$

Similarly from the $\triangle BDE$ it may be proved that

$BD\ OD = DE\ DR$, . $AB\ AP = DE\ DR$

But $AB\ AP = BC\ PQ$ (· $\triangle$s ABC, APQ are similar)

and $DE\ DR = EF\ RS$ (· $\triangle$s DEF, DRS are similar)

$BC\ PQ = EF\ RS$, or alternately $BC\ EF = PQ\ RS$

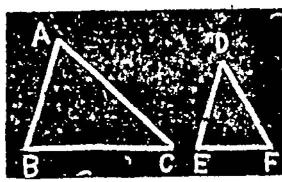
But $BC = EF$ [Hyp], $PQ = RS$

Again since $\triangle$s APQ, DRS are between the same parallels AD and PS, hence they have the same altitude

$\triangle APQ\ \triangle DRS = PQ\ RS$ (Th 70)

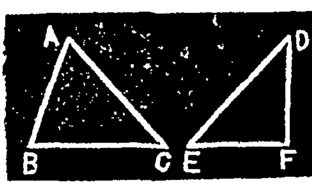
But $PQ = RS$ (*proved*), $\triangle APQ = \triangle DRS$

5. Let ABC, DEF be two triangles having $\angle B = \angle E$ If $AB = 2\ 7''$, $BC = 3\ 5''$, $DE = 2\ 1''$, and $DF = 1\ 8''$, *then it is required to prove that* $\triangle ABC\ \triangle DEF = 5\ 2$



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB\ BC}{DE\ EF}\ (\text{Th } 71) = \frac{2\ 7 \times 3\ 5}{2\ 1 \times 1\ 8} = \frac{5}{2}$$

6. Let ABC, DEF be two triangles of equal area, having $\angle B = \angle E$ If $AB = 5\ 6$ cm, $BC = 6\ 3$ cm, $DE = 7\ 2$ cm, *it is required to find* EF



Since $\triangle ABC . \triangle DEF = AB . BC . DE . EF$ (Th 71)
and since $\triangle ABC = \triangle DEF$, $\therefore AB.BC = DE.EF$

$$\therefore EF = \frac{AB.BC}{DE} = \frac{5 \cdot 6 \times 6 \cdot 3}{7 \cdot 2} = 4 \cdot 9 \text{ cm}$$

7. Let $ABCD$, $EFGH$ be two parlms having their areas in the ratio 3:4, and $\angle B = \angle F$. If $AB = 4 \cdot 8$ cm., $BC = 13 \cdot 5$ cm., $EF = 10 \cdot 8$ cm., *it is required to find FG.*

Since $AB.BC : FG.FE$ = parm AC : parm GE (Th 71) $= 3 : 4$

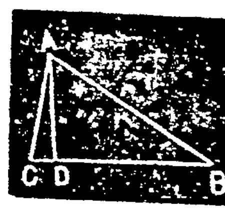
$\therefore 3\ FG.FE = 4\ AB.BC$, and $\therefore FG = \dfrac{4AB.BC}{3FE} = \dfrac{4 \times 4 \cdot 8 \times 13 \cdot 5}{3 \times 10 \cdot 8}$
$= 8$ cm

(ii) Draw AP, EQ perp to BC, GE and let them be denoted by p', p' respectively; then shall $p : p' = 4 : 9$

Since parm. $AC = AP.BC$, and parm $GE = EQ.FG$.

$$\therefore \frac{AP.BC}{EQ.FG} = \frac{\text{parm. } AC}{\text{parm } GE} = \frac{3}{4} \quad \therefore \frac{AP}{EQ} = \frac{3FG}{4BC} = \frac{3 \times 8}{4 \times 13 \cdot 5} = \frac{4}{9}$$

8. Let ABC be a triangle, and let its altitude AD be denoted by p. Then $AD = AC$ Sin C, or $p = b$ Sin C.

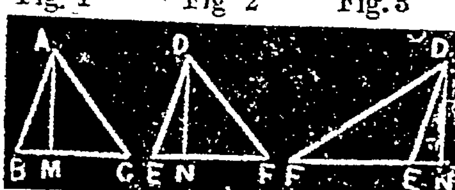


$\therefore$ area of $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC.AD = \frac{1}{2} ap = \frac{1}{2} ab$ Sin C

(ii) If DEF be any other triangle having $\angle E = \angle B$, the area of $\triangle DEF = \frac{1}{2} DE.EF$ Sin E

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} AB.BC \text{ Sin } B}{\frac{1}{2} DE.EF \text{ Sin } E} = \frac{AB.BC}{DE.EF} \quad [\because \text{Sin } B = \text{Sin } E]$$

Fig. 1 Fig 2 Fig. 3



9. Let ABC, DEF be two triangles equal in area, and having $AB.DE = EF.BC$ *It is required to prove*

that $\angle$s B and E are either equal or supplementary

Draw AM, DN perp to BC and EF respectively, then the area of $\triangle ABC = \frac{1}{2} AM\ BC$ and that of $\triangle DEF = \frac{1}{2} DN\ EF$
But $\triangle ABC = \triangle DEF$ $\therefore AM.BC = DN\ EF$

Again Since $AB\ DE = EF\ BC$ [Hyp], $\therefore AB\ BC = DE\ EF$

$$\therefore \frac{AM\ BC}{AB\ BC} = \frac{DN\ EF}{DE\ EF} \text{ or } \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DE}, \quad \therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$$

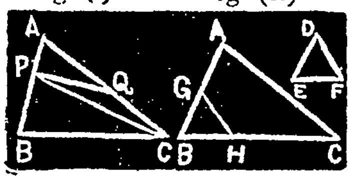
$\therefore$ In the rt angled $\triangle$s AMB, DEN, since $\angle AMB = \angle DNE$, and the sides about $\angle$s BAM, EDN are proportionl (*proved*), the $\angle$s B and E are either equal or supplementary [Th 65]

Note—This exercise can be easily proved by means of Ex 8 as given below, but it involves the use of Trigonometry, and is therefore avoided

[Since $\triangle ABC = \triangle DEF$, $\therefore \frac{1}{2} AB\ BC$ Sin $B = \frac{1}{2} DE\ EF$ Sin E (Ex 8) But $AB\ BC = DE.EF$ (Hyp), $\therefore$ Sin B = Sin E $\therefore$ $B = E$ or $= 180° - E$]

10. Let ABC be a triangle, and let AB, AC be cut by any st line at P and Q respectively *It is required to prove that* $\triangle APQ : \triangle ABC = AP.AQ : AB\ AC$

Fig (i) Fig (ii)



Join PC, then $\frac{\triangle APQ}{\triangle APC} = \frac{AQ}{AC}$ [Th 70], and $\frac{\triangle APC}{\triangle ABC} = \frac{AP}{AB}$ (Th 70)

$\therefore$ By multiplying these two ratios, we have
$\triangle APQ : \triangle ABC = AP\ AQ : AB\ AC$

(ii) Let ABC, DEF be two triangles having $\angle B = \angle E$
It is required to prove that $\triangle ABC : \triangle DEF = AB\ BC : DE.EF$

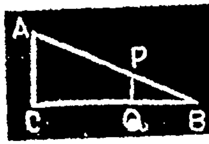
Apply the $\triangle DEF$ to the $\triangle ABC$ such that the pt E falls upon the pt B, and the side ED along the side AB,

then the side EF will fall along the side BC, since $\angle E = \angle B$. Let BGH be the new position of the $\triangle DEF$.

Then $\triangle ABC : \triangle BGH = AB.BC : BG.GH$ [Proved in case (1)]
i.e. $\triangle ABC : \triangle DEF = AB.BC : DE.EF$.

Exercises on page 291.

1. Let ABC be a triangle, and let BQ be one third of BC. Draw PQ parl to AC. *It is required to find what part of the* $\triangle ABC$ *is the* $\triangle BPQ$.

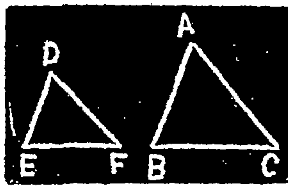


Since the $\triangle$s AXY, BPQ are equiangular, and hence similar

$\therefore \triangle BPQ : \triangle ABC = BQ^2 : BC^2$ [Th 72] $= 1:9$

$\therefore \triangle BPQ$ is *one-ninth* of the $\triangle ABC$.

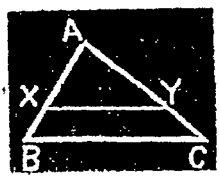
2. Let ABC, DEF be two similar triangles in which the corresponding sides BC, EF are 3 ft 6 inch, and 2 ft 4 in respectively. If the area of the $\triangle ABC$ is 45 sq. ft., *it is required to find the area of the* $\triangle DEF$.



$\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$ [Th. 72] $= (3\frac{1}{2})^2 : (2\frac{1}{3})^2 = 9 : 4$

$\therefore \triangle DEF = \frac{4}{9} \times \triangle ABC = \frac{4}{9} \times 45 = 20$ sq. ft

3. Let ABC be a triangle, and let AB be divided at X in the ratio 5:3. Draw XY parl to BC, then if the area of the $\triangle ABC$ $= 25.6$ sq. cm, *it is required to find the area of the* $\triangle AXY$



Since $BX : AX = 3 : 5$, $\therefore BX + AX : AX = 3+5 : 5$, or $AB : AX = 8 : 5$

$\triangle ABC : \triangle AXY = AB^2 : AX^2$ [Th. 72] $= 64 : 25$

$\therefore \triangle AXY = \frac{25}{64} \times \triangle ABC = \frac{25}{64} \times 25.6 = 10$ sq cm.

4. See figure Ex 2

Let ABC, DEF be two similar triangles whose areas are 392 sq cm and 200 sq cm respectively. *It is required to find the ratio of any pair of corresponding sides*

$$AB^2 \; DE^2 = \triangle ABC \; \triangle DEF \text{ [Th 72]} = 392 \; 200 = 49 \; 25$$

$$\therefore AB \; DE = 7 \; 5$$

Since the $\triangle$s ABC, DEF are similar, hence the ratio of any pair of corresponding sides is the same as $AB \; DE$, or as 7·5

5. See figure Ex· 2.

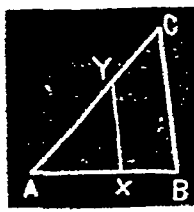
Let ABC, DEF be two similar triangles whose areas are 32 sq in, and 60 5 sq in respectively If $DE = 7 \; 7''$, *it is required to find AB.*

$$AB^2 \; DE^2 = \triangle ABC . \triangle DEF \text{ [Th 72]} = 32 \; 60 \; 5 = 16 \; 30 \; 25$$

$\therefore AB \; DE = 4 \; 5 \; 5$, and $\therefore 5 \; 5 \; AB = 4 \; DE = 4 \times 7 \; 7 = 30 \; 8$,

$$\therefore AB = 5 \; 6''$$

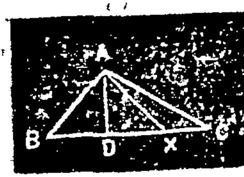
6. Let ABC be a triangle, and let XY be drawn parallel to BC such that $\triangle \; AXY$ is *nine-sixteenths* of the $\triangle \; ABC$ *It is required to find the ratio $AX . AB$*



$\therefore AX^2 \; AB^2 = \triangle AXY \; \triangle ABC$ (Th 72) $= 9:16$,

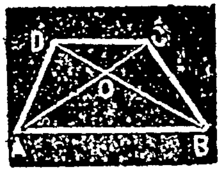
$\therefore AX \; AB = 3,4 \quad \therefore$ Divide AB at X in the ratio 3.4, and draw XY parl. to BC, then the $\triangle AXY =$ *nine-sixteenths* of the $\triangle ABC$

7. Let ABC be a triangle right-angled at A, and let AD be drawn perp to BC *It is required to prove $\triangle BAD \; \triangle ACD = BA^2 \; AC^2$*



Since $\triangle$s BAD, ACD are similar, and BA, AC being their hypotenuses, are their corresponding sides (Th 66)

$$\therefore \triangle BAD \; \triangle ACD = BA^2, AC^2 \quad \text{(Th 72)}$$

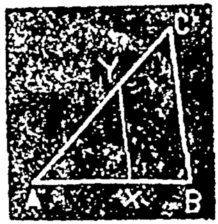


8. Let $ABCD$ be a trapezium of which AB, CD are the parallel sides, such that $AB=2CD$ If the diagonals AC, BD intersect at O, *it is required to find the ratio of the* $\triangle AOB$ *the* $\triangle COD$

Since $\angle ABO=$ alt. $\angle ODC$, and $\angle BAO=\angle OCD$

the $\triangle s$ AOB, COD are similar

$\therefore \triangle AOB : \triangle COD = AB^2 : CD^2 = 4 : 1$



9. Let ABC be a triangle, and let XY be drawn parl to BC such that $\triangle AXY$: fig $XBCY = 4 : 5$ *It is required to prove that* $AX : BX=2 : 1$

Since $\dfrac{\text{Fig } XBCY}{\triangle AXY}=\dfrac{5}{4}$, $\therefore \dfrac{\text{Fig } XBCY+\triangle AXY}{\triangle AXY}$

$=\dfrac{5+4}{4}$, or $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AXY}=\dfrac{9}{4}$

$\therefore AB^2 : AX^2 = \triangle ABC : \triangle AXY$ (Th 72)$=9 : 4$, $\quad AB : AX=3 : 2$

$\therefore AB-AX : AX=3-2 : 2$, or $BX : AX=1:2$, $\quad AX : BX = 2 : 1$

10 Let ABC, $A'B'C'$ be two similar triangles If p, p' denote their corresponding altitudes, R, R' the radii of their circum-circles, and r, r' radii of their in-circles, then each of the ratios $p : p'$, $R : R'$, $r : r'$ is equal to the ratio of any pair of corresponding sides (Ex 2, p 267)

Fig (i) Fig (ii)

Again since $\triangle ABC : \triangle A'B'C'=$ the ratio of the squares of any pair of corresponding sides (Th 72)

$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = p^2 : p'^2 = R^2 : R'^2 = r^2 : r'^2$

(ii) Again let AE, $A'E'$ be their corresponding medians, then $\triangle ABE=\frac{1}{2}\triangle ABC$, and $\triangle A'B'E'=\frac{1}{2}\triangle A'B'C'$ (Th 70)

$\therefore \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \triangle ABE : \triangle A'B'E'$

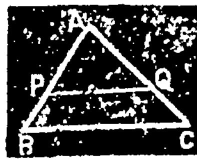
Since $\triangle$s $ABC, A'B'C'$ are similar, $AB : A'B' = BC : B'C'$
$= BE : B'E'$

$\therefore$ In the $\triangle$s $ABE, A'B'E'$, $\angle B = \angle B'$ and the sides about them are proportionals, hence they are similar (Th 64)

$\therefore \triangle ABE : \triangle A'B'E' = AE^2 : A'E'^2$ (Th. 72)

$\therefore$ also $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AE^2 : A'E'^2$

Exercises on page 294

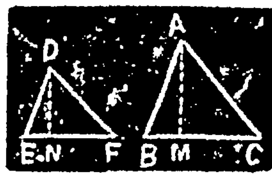


1. Let ABC be a triangle *It is required to draw PQ parl to BC such that $\triangle APQ$ = four-ninths of $\triangle ABC$*

Divide AB at P in the ratio 2 3, and draw PQ parl to BC

Then $\triangle APQ : \triangle ABC = AP^2 : AB^2$ (Th 72) $= 4 : 9$

$\therefore \triangle APQ$ = *four-ninths* of $\triangle ABC$



2. Let DEF be a triangle such that $DE = 2''$, $EF = 3\cdot2''$, and $FD = 2\cdot5''$ *It is required to find the sides of a similar $\triangle ABC$ which $= 3 \triangle DEF$*

$AB^2 : DE^2 = \triangle ABC : \triangle DEF$ (Th. 72) $= 3 : 1$

$\therefore AB : DE = \sqrt{3} : 1$

$\therefore AB = \sqrt{3} \times DE = \sqrt{3} \times 2 = 3.46''$

Similarly it may be shown that $BC = \sqrt{3}EF = \sqrt{3} \times 3\cdot2 = 5.54''$, and that $AC = \sqrt{3}FD = \sqrt{3} \times 2\cdot5 = 4.33''$

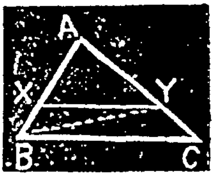
3. See figure Ex. 2

Let ABC, DEF be two similar triangles such that $\triangle DEF : \triangle ABC = 18\cdot69 : 16\cdot81$ Draw AM, DN perp to BC, EF, then if AM = 10 ft. 3 in., *it is required to find DN*

$DN^2 : AM^2 = \triangle DEF : \triangle ABC$ [Ex-10, (i), p 291] $= 18\cdot69 : 16\cdot81$

$\therefore \dfrac{DN}{AM}=\dfrac{3.7}{4.1}$ $\therefore$ $DN=\dfrac{3.7\times AM}{4.1}=\dfrac{3.7\times 41}{4.1\times 4}=\dfrac{37}{4}=$9ft. 8 in.

4. Let ABC be a triangle whose area= 16 sq. cm; and let XY drawn parl to BC divide AB in the ratio 3:5 Join BY, *then it is required to find the area of the* $\triangle BXY$.



Since $AX:BX=3:5$, $\therefore AB:AX=8:3$

Now $\triangle ABC:\triangle AXY=AB^2:AX^2$ (Th 72)$=64:9$

$\therefore \triangle AXY=\dfrac{9}{64}\times\triangle ABC=\dfrac{9}{64}\times 16=\frac{9}{4}$ sq cm,

Again since $\triangle AXY:\triangle BXY=AX:BX$ (Th 70)$=3:5$

$\therefore \triangle BXY=\frac{5}{3}\triangle AXY=\frac{5}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{15}{4}=3.75$ sq. cm.

5. See Figure Ex 4

Let ABC be a triangle having $BC=10$ cm., and let XY drawn parl to BC cut the $\triangle AXY$=*one-fifth* of $\triangle ABC$. *It is required to find* XY

$XY^2:BC^2=\triangle AXY:\triangle ABC$ (Th 72)$=1:5$

$\therefore \dfrac{XY}{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\therefore XY=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times BC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times 10=4.5$ cm.

6. Let $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ be two regular pentagons on the sides of 2.5″ and 3″ respectively, and let AB, $A'B'$ be their corresponding sides If the area of $ABCDE=10\frac{3}{4}$ sq in, *it is required to find the area of* $A'B'C'D'E'$.

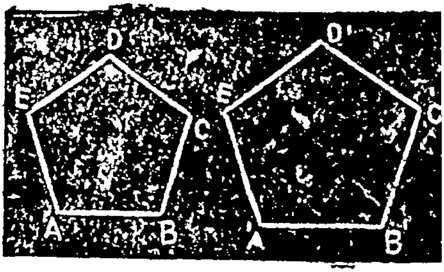
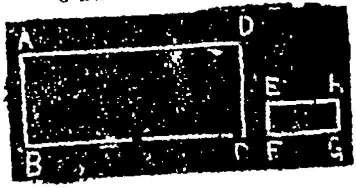


Fig $ABCDE$ Fig $A'B'C'D'E' = AB^2 \; A'B'^2$ (Th. 72) $= 6\ 25\ 9$

$\therefore A'B'C'D'E' = \frac{9}{6\ 25}$ the fig $ABCDE = \frac{9}{6\ 25} \times \frac{48}{4} = 15\ 48$ sq in



7. Let $ABCD$ represent a rectangular area whose length=10 8 m, and whose length breadth =12 5 Let $EFGH$ be another similar rectangle whose area = *one-ninth* of the rect $ABCD$. *It is required to find the length and breadth of EFGH*

Since $BC^2 : FG^2 =$ rect $ABCD$ rect $EFGH$ (Th 72) $= 9\ 1$

$BC\ FG = 3\ 1, \quad FG = \frac{1}{3}\ BC = \frac{1}{3} \times 10\ 8 = 3\ 6$ m

Again since $FG\ EF = BC\ AB = 12\ 5$

$$EF = \frac{5}{12} FG = \frac{5}{12} \times 3\ 6 = 1\ 5 \text{ m}$$

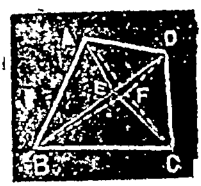
8 $\dfrac{\text{area of the plan}}{\text{area of the field}} = \dfrac{\text{Sq on the side of the plan}}{\text{Sq on the side of the field}} = \dfrac{1 \times 1 \text{ sq in}}{66 \times 66 \text{ sq yds}}$

But the area of the plan=100 sq in [*Hyp*]

, the area of the field $= 100 \times 66 \times 66$ sq. yds

$$= \frac{100 \times 66 \times 66}{4840} = 90 \text{ acres}$$

Since the plan is always drawn similar to the figure which it represents, hence the *shape* of the figure is immaterial



9. Let a quadl $ABCD$ represent an estate drawn to the scale of 25″ to the mile , Join AC and draw BE, DF perp to AC Then if $AC = 20''$, $BE = 24''$, and $DF = 26''$, *it is required to find the acerage of the estate.*

Area of the quadl $ABCD = \frac{1}{2}\ AC \times (BE + DF)$ (Th. 28)

$= \frac{1}{2} \times 20 \times (24 + 26) = 500$ sq in.

$$\frac{\text{area of the estate}}{\text{area of quadl. } ABCD}=\frac{1\times 1 \text{ sq. mi}}{25\times 25 \text{ sq. in}}=\frac{1 \text{ sq. mi.}}{625 \text{ sq. in}}$$

But the area of the quadl $ABCD = 500$ sq. in.

$$\therefore \text{area of the estate} = \frac{500}{625} \text{ sq. mi.} = \frac{500\times 1760\times 1760}{625\times 4840}$$

$=512$ acres.

10 Let a triangle ABC having $AB = 13$ cm., $BC=15$ cm., $CA=14$ cm represent a field whose area $=1.89$ hectares. *It is required to find the scale on which the plan is drawn.*

Area of $\triangle ABC=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ (Ex. 7, p. 111)

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{42\times 16\times 14\times 12}=84 \text{ sq. cm}$$

and the area of the field $=1.89$ hectares $=1.89\times 100\times 100$ sq. m.

$$\frac{\text{Sq. on a side of } \triangle ABC}{\text{Sq. on the corresp. side of the field}}=\frac{\text{area of } \triangle ABC}{\text{area of the field}}$$

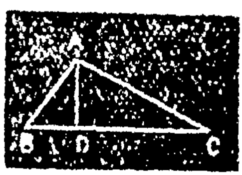
$$=\frac{84}{18900}=\frac{4 \text{ sq. cm.}}{900 \text{ sq. m.}}$$

$$\frac{\text{a side of } \triangle ABC}{\text{the corresp. side of the field}}=\sqrt{\frac{4}{900}}=\frac{2}{30}=\frac{1 \text{ cm}}{15 \text{ m}}$$

$\therefore$ The plan is drawn on the scale of 1 cm. to 15 m.

Exercises on page 295.

1. Let ABC be a triangle right-angled at A, and let AD be drawn perp. to BC. *It is required to prove that* (i) $BC^2 : BA^2 = BC : BD$, (ii) $BC^2 : CA^2 = BC : CD$, (iii) $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



(i) Since the $\triangle$s ABC, ABD have the same altitude hence $\triangle ABC : \triangle ABD = BC : BD$ (Th. 72),

and since $\triangle$s ABC, ABD are similar, and BC, BA are their corresponding sides (Th. 66)

$\therefore \triangle ABC \ \triangle ABD = BC^2 \ BA^2$ (Th 72)

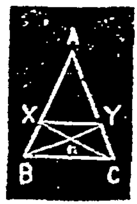
$\therefore BC^2 \ BA^2 = BC \ BD$

(ii) Similarly from the similar $\triangle$s ABC, ACD it may be shown that $BC^2 \ CA^2 = BC \ CD$

(iii) From (i) and (ii) we have $\frac{BA^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$ and $\frac{CA^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC}$

$$\therefore \frac{BA^2}{BC^2} + \frac{CA^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC}, \text{ or } \frac{BA^2 + CA^2}{BC^2} = \frac{BD + CD}{BC}$$

But $BD + CD = BC$, $\therefore BA^2 + CA^2 = BC^2$

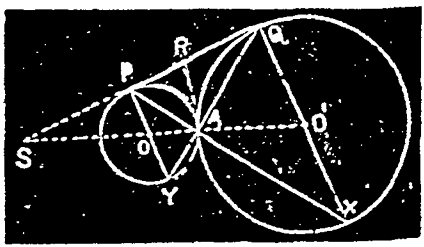


2. Let a triangle ABC be bisected by a st XY parl to BC. *It is required to find the ratio* $AX \ AB$

Since $AX^2 \ AB^2 = \triangle AXY \ \triangle ABC$ [Th. 72]$=1:2$,

$\therefore AX \ AB = 1 \ \sqrt{2}$

Hence a triangle can be bisected by a st line XY parl to BC if the pt X divides AB such that $AX \ AB = 1 \ \sqrt{2}$



3. Let two circles whose centres are O, O' have an external contact at A, and let a common tangent touching them at P, Q meet $O'O$ produced in S *It is required to prove that* $\triangle SAP \ \triangle SAQ = SP \ SQ$.

It is proved in Ex 7, p. 269 that $\triangle$s SAP, SAQ are similar, and $SP \ SA = SA \ SQ$, $\therefore SP \ SQ = SP^2 \ SA^2$ [Th 73, cor 1]

$\therefore \triangle SAP . \triangle SAQ = SP^2 \ SA^2$ [Th 72]$= SP \ SQ$

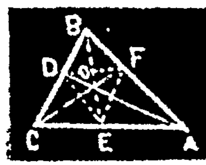
Note—It follows evidently from Th. 70 that $\triangle SAP \ \triangle SAQ = SP \ SQ$.

4. Let two circles intersect at A and B, and let the tangents at A meet the circumferences at P and Q Join BP, BQ *It is required to prove that* $\triangle ABP : \triangle ABQ = BP : BQ$

It is proved in Ex. 8, p 269 that $\triangle$s ABP, ABQ are similar, and that $BP : BA = BA : BQ$ .. $BP : BQ = BP^2 : BA^2$ [Th. 73, cor. 1

$\therefore \triangle ABP : \triangle ABQ = BP^2 : BA^2$ [Th 72] $= BP : BQ$

Note—It also follows at once from Th 70 that $\triangle ABP : \triangle ABQ = BP : BQ$



5. Lte DEF be the pedal triangle of the ABC. *It is required to prove that* (i) $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$, and (ii) *fig* $AFDC : \triangle DBF = AD^2 : BD^2$

Since the $\angle$s AFC, ADC are rt angles, hence the pts A, F, D, C, are concyclic.

$\therefore$ the $\angle$s CAD, CFD standing on the same arc CD are equal

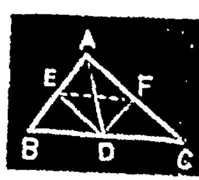
$\therefore$ their complements are also equal, viz $\angle ACD = \angle BFD$

And the angle at B is common to the $\triangle$s DBF, ABC, hence their third angles are also equal, therefore they are similar

$\therefore$ (i) $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$ [Th 72]

and (ii) $\triangle ABC - \triangle DBF : \triangle DBF = AB^2 - BD^2 : BD^2$

or fig. $AFDC : \triangle DBF = AD^2 : BD^2$



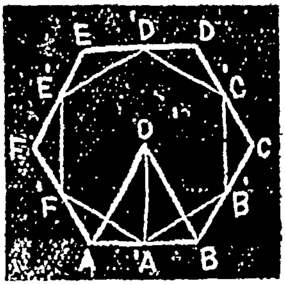
6. Let ABC be a triangle, and let a $\triangle DEF$ be inscribed in it by joining the middle points D, E, F of the sides BC, AB, and AC respectively

Then since DE, EF, FD are parl to and half of CA, BC and AB respectively; hence $\triangle$s ABC, DEF are similar.

$\triangle DEF : \triangle ABC = DE^2 : CA^2$ [Th 72] $= 1 : 4$, $\therefore DEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

Similarly if a third triangle be inscribed in the $\triangle DEF$, and a fourth triangle in the third, it may be shown that the 3rd triangle $= \frac{1}{4} \triangle DEF$, and the 4th triangle $= \frac{1}{4}$ of the 3rd.

7. Let $ABCDEF$ be a regular hexagon drawn on a side of a cm and let $A'B'C'D'E'F'$ be a second hexagon inscribed in the first by joining $A'B'C'D'E'F'$ the middle points of the sides AB, BC, CD, EF and FA respectively



Let O be the centre of the circle circumscribed about the hexagon $ABCDEF$, then it is also the centre of the circle circumscribed about the hexagon $A'B'C'D'E'F'$ [Prob 31] Join OA, OA', then $OA = AB$, and $OA' = A'B'$

Now $OA'^2 = OA^2 - AA'^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$

$$\frac{\text{Hexagon } ABCDEF}{\text{Hexagon } A'B'C'D'E'F'} = \frac{OA^2}{OA'^2} = \frac{a^2}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ Hexagon $A'B'C'D'E'F' = \frac{3}{4}$ of the hexagon $ABCDEF$

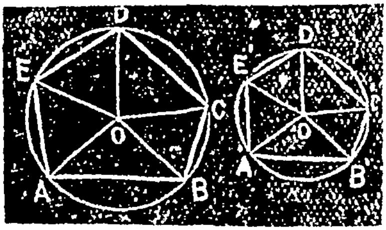
Similarly if a third hexagon be inscribed in the second, a fourth in the third, and a fifth in the fourth hexagon it can be shown that the *third* hexagon $= \frac{3}{4}$ of the *second*, the *fourth* hexagon $= \frac{3}{4}$ of the *third*, and the *fifth* hexagon $= \frac{3}{4}$ of the *fourth*

$\therefore$ the *fifth* hexagon $= \frac{3}{4}$ of the *fourth* $= \frac{9}{16}$ of the *third*
$= \frac{27}{64}$ of the *second* $= \frac{81}{256}$ of the *first*

the *first* hexagon the *fifth* hexagon $= 256$ 81

8. Let $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ be two similar cyclic figures, and let AB, $A'B'$ be their corresponding sides Let O, O' be the centres and D, D' the diameters of the circle $ABCDE$

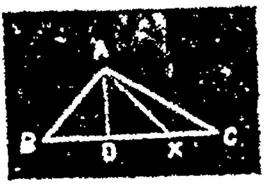
Fig (i) Fig (ii)



and $A'B'C'D'E'$. Then the figures $ABCDE$ $A'B'C'D'E'$ can be divided into the *same* number of similar triangles by joining O O to the vertices of the figures $ABCDE$ and $A'B'C'D'E'$ respectively.

$$\frac{\text{Fig } ABCDE}{\text{Fig } A'B'C'D'E'} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OA'B'} = \frac{OA^2}{O'A'^2} = \frac{D^2}{D'^2}$$

Exercises on page 297.

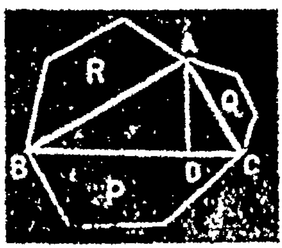


1. Let ABC be a triangle right-angled at A, and let AD be perp from A on BC. *It is required to prove that* (i) $BA^2 = BC\,BD$, (ii) $CA^2 = CB\,CD$, *and hence* (iii) $BC^2 = BA^2 + AC^2$

(i) Because the $\triangle$s ABD ABC are similar [Th. 66],
$BD\ BA = BA\ BC$, and $\because$ $BA^2 = BC.BD$

(ii) Again because the $\triangle$s ACD ABC are similar
$\therefore CD\cdot CA = CA\ CB$, and $\therefore CA^2 = CB\ CD$.

(iii) $BA^2 + CA^2 = BC.BD + BC\ CD = BC(BD + CD) = BC^2$



2. Let ABC be a triangle right-angled at A, and let AD be perp to BC. On BC CA, and AB are described P, Q and R three similar and similarly described figures. Then if the fig $P = \triangle ABC$, *it is required to prove that* (i) *the fig* $Q = \triangle ADC$, and (ii) *the fig* $R = \triangle ADB$

(i) Since the $\triangle$s ABC, ACD are similar [Th. 66]
$\therefore$ $\triangle ABC$ $\triangle ACD = BC^2\ AC^2$ [Th 72]
$=$ the fig P. the fig Q [Th 73]

But the fig $P = \triangle ABC$ [*Hyp*], $\therefore$ the fig $Q = \triangle ACD$

(ii) Again because $\triangle$s ABC, ABD are similar [Th 66]

$\therefore$ $\triangle ABC : \triangle ABD = BC^2 : AB^2$ [Th 72]

$= \text{the fig. } P : \text{the fig } R$ [Th. 73]

But the fig $P = \triangle ABC$ [*Hyp*], $\therefore$ the fig $R = \triangle ABD$

3. See figure Ex. 2

If $AB : AC = 8 : 5$, and if the fig $P = 8.9$ sq cm, *it is required to find the areas of the figs. Q and R*

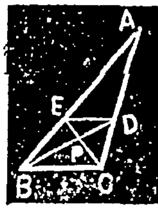
Since the fig R : the fig. $Q = AB^2 : AC^2 = 64 : 25$

$\therefore$ (the fig $R +$ the fig Q) : the fig. $Q = (64+25) : 25$

i e the fig P : the fig $Q = 89 : 25$ [Th 74]

$\therefore$ the fig $Q = \frac{25}{89} \times$ the fig $P = \frac{25}{89} \times 8.9 = 2.5$ sq cm.

the fig $R =$ the fig P — the fig. $Q = 8.9 - 2.5 = 6.4$ sq cm

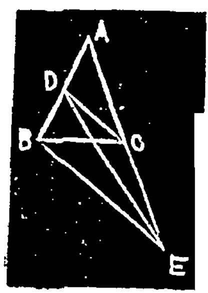


4 Let ABC be a triangle, and let its medians BD, CE intersect at P Join DE, *then it is required to find the ratio of* $\triangle BPC$ to $\triangle DPE$

Since DE is parl to, and half of BC, hence $\angle PDE =$ alt $\angle PBC$, and $\angle PED =$ alt $\angle PCB$ [Th 14], also $\angle DPE = \angle BPC$

$\therefore$ $\triangle$s BPC, DPE are similar [Th 62]

$\therefore$ $\triangle BPC : \triangle DPE = BC^2 : DE^2$ [Th 72] $= 4 : 1$



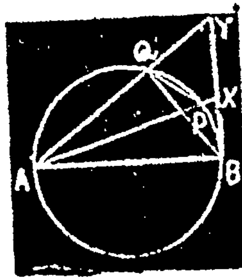
5. Let ABC be an isosceles triangle having the equal sides AB, AC each $= 3.6''$ From a pt. D in AB let there be drawn a st line DE cutting AC produced at E, such that $\triangle ADE = \triangle ABC$ If $AD = 1.8''$, *it is required to find AE*

Join DC, BE Then because $\triangle ABC = \triangle ADE$ [hyp]. By subtracting $\triangle ADC$ from each of

these equals, we have $\triangle\ DBC = \triangle\ DEC$, and since they stand on the same base DC, hence BE is parl to DC [Th. 27]

∴ $AE : AC = AB : AD$ [Th. 60, Cor.], or $AE : 3 \cdot 6 = 3 \cdot 6 : 1 \cdot 8$,

∴ $AE = \dfrac{3 \cdot 6 \times 3 \cdot 6}{18} = 7 \cdot 2''$



6. Let AB be a diameter of a circle, and let any two chords AP, AQ produced meet the tangent at B in X and Y. Join PQ, *then it is required to prove that* (i) $\triangle$s APQ, AYX *are similar, and* (ii) *the pts* P, Q, Y, X *are concyclic.*

Join BQ, then since the $\angle ABY$ is a rt angle [Th 46], so also the $\angle AQB$ is a rt angle [Th. 41], and the angle at A is common to the $\triangle$s ABY, AQB, hence their third angles AYB, ABQ are also equal

But $\angle ABQ = \angle APQ$ [Th 39], ∴ $\angle AYB$, or $\angle AYX = \angle APQ$.

Similarly it may be proved that $\angle AXY = \angle AQP$

And the angle at A is common,

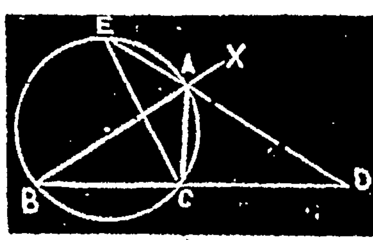
(i) ∴ the $\triangle$s APQ, AYX are similar (Th 62).

(ii) Since the $\angle$s APQ, XPQ together $= 2$ rt angles (Th 1)

∴ also the $\angle$s XYQ, XPQ together $= 2$ rt angles

Similarly the $\angle$s PXY, PQY together $= 2$ rt angles

∴ the pts X, P, Q, Y are concyclic (*Converse of Th. 41*).



7. Let ABC be a triangle, and let the bisector of the external $\angle A$ meet the base BC produced at D, and the circum-circle at E. *It is required to prove that* $AB.AC = AE.AD$.

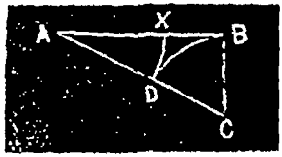
Join CE, then because $\angle CAD = \angle XAD = \angle BAE$

By adding $\angle BAC$ to each of these equals, we have $\angle DAB = \angle CAE$

Also $\angle ABC = \angle AEC$ (Th 39) Hence the third angles of the $\triangle$s ADB, ACE are also equal, and hence they are similar

$\therefore$ $AB : AE = AD : AC$, and $AB \cdot AC = AE \cdot AD$

8. A st line is said to be divided *in extreme and mean ratio*, when the whole line is to the greater segment as the greater segment is to the less



Take a st line $AB = 10$ cm, and divide it in extreme and mean ratio at X (Prob. 23)

Measure AX, BX, and notice that $AX = 6\ 2$ cm, and $BX = 3\ 8$ cm

By *Calculation* since $AB = 10$, hence $BC = 5$, and $DC = BC = 5$

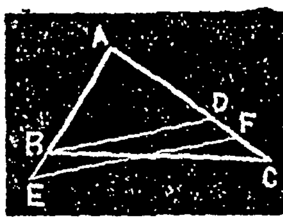
If $AX = x$, then $AD = AX = x$, and $AC = AD + DC = x + 5$

Again since $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $(x+5)^2 = 10^2 + 5^2 = 125$.

$\therefore x + 5 = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, $x = 5\sqrt{5} - 5 = 6{\cdot}2$ cm

$AX = 6\ 2$ cm, and $BX = AB - AX = 10 - 6\ 2 = 2{\cdot}8$ cm

9. *It is required to draw an isosceles triangle equal to the given triangle ABC and having its vertical angle* $= \angle A$.



Const.—From AC cut off $AD = AB$, and find AF the mean proportional between AC and AD, so that $AF^2 = AC \cdot AD$ [Prob 38]

Join BD, and draw FE parl to BD meeting AB produced at E Then AEF is the required triangle

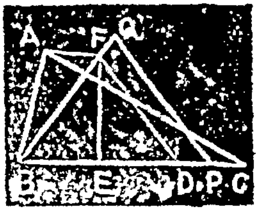
Proof.—Since EF is parl to BD, therefore $\triangle\ AEF$ is equiangular to ABD, and hence $\triangle\ AEF$ is isosceles so that $AE=AF$

Again since $\frac{\triangle ABD}{\triangle AEF}=\frac{AD^2}{AF^2}$ (Th 72) $=\frac{AD^2}{AD.AC}=\frac{AD}{AC}$

also $\triangle ABD\ \triangle ABC=AD.AC$ (Th 70)

$\therefore\ \triangle\ AEF=\triangle\ ABC$, and hence AEF is the required isosceles triangle.

10. *It is required to construct an isosceles triangle on a given base and equal in area to the given triangle ABC.*



Const.—From BC cut off BP equal to the given base, and find BD the third proportional to BC and BP, so that $BP^2=BC.BD$ (Prob. 36).

Bisect BD at E; and draw EF perp to BD meeting the st line drawn from A parl to BC at F Join BF, FD; then $BF=FD$ and hence BFD is an isosceles triangle

From P draw a st line parl. to DF meeting BF produced at Q, then BPQ is the required triangle

Proof.—Since PQ is parl to DF, therefore $\triangle\ BPQ$ is equiangular to $\triangle BDF$; and hence $\triangle BPQ$ is isosceles so that $BP=BQ$

Again since $\frac{\triangle BDF}{\triangle BPQ}=\frac{BD^2}{BP^2}$ (Th 72) $=\frac{BD^2}{BC.BD}=\frac{BD}{BC}$

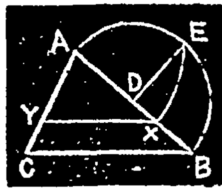
Also $\triangle BDF\cdot\triangle ABC=BD.BC$ (Th 70)

$\therefore\ \triangle BPQ=\triangle ABC$, and hence BPQ is the required isosceles triangle

Note.—This exercise can be easily solved as Ex. 5, p 130; but we have preferred the above method because it involves the use of proportion.

Exercises on page 299

1. Let ABC be a given triangle *It is required to divide it into two equal parts by a line XY drawn parl. to* BC



Const.—Bisect AB in D, and find AX mean proportional between AD and AB, so that $AX^2 = AD \cdot AB$ (*Prob. 38, Note*), and draw XY parl to BC Then XY is the required line

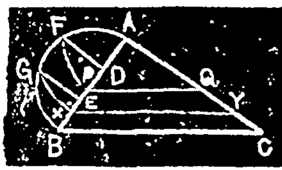
Proof—$\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$ (Th 72) $= \frac{AB \cdot AD}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$

$\therefore \triangle AXY = \frac{1}{2} \triangle ABC$, $\therefore$ XY is the required line

(ii) Since $AX^2 : AB^2 = 1 : 2$ [*Proved*], $\therefore$ $AX : AB = 1 : \sqrt{2}$

Note. For another solution see Ex 2, page 295.

2. Let ABC be a given triangle. *It is required to divide it into three equal parts by lines PQ, XY drawn parl to BC*



Const—Divide AB into three equal parts at D and E Find AP, AX mean proportional between AB, AD, and AB, AE respectively, so that $AP^2 = AB \cdot AD$, and $AX^2 = AB . AE$ (*Prob.* 38, *Note*); and draw PQ, XY parl. to BC Then PQ, XY are the required lines.

Proof— $\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP^2}{AB^2}$ (Th. 72) $= \frac{AB \cdot AD}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$

and $\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2}$ (Th 72) $= \frac{AB \cdot AE}{AB^2} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$

$\triangle APQ = \frac{1}{3} \triangle ABC$, and $\triangle AXY = \frac{2}{3} \triangle ABC$

$\therefore$ $\triangle ABC$ is divided into three equal parts by PQ & XY

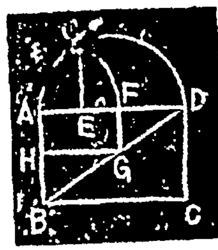
(ii) Since $\frac{AP^2}{AB^2}=\frac{1}{3}$, and $\frac{AX^2}{AB^2}=\frac{2}{3}$ (*Proved above*)

$\therefore$ $\frac{AP^2}{1}=\frac{AX^2}{2}=\frac{AB^2}{3}$, and $\frac{AP}{1}=\frac{AX}{\sqrt{2}}=\frac{AB}{\sqrt{3}}$

(iii) If a triangle is to be divided into n equal parts by lines drawn parl to one side BC, we must divide one of the other two sides AB at the pts P, Q, R, S.... such that

$$\frac{AP}{1}=\frac{AQ}{\sqrt{2}}=\frac{AR}{\sqrt{3}}=\frac{AS}{\sqrt{4}}=\ldots=\frac{AB}{\sqrt{n}},$$

and from P, Q, R, S,.... draw lines parl to BC



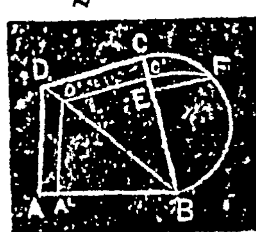
3. Draw AB, AD any two st lines at right angles to each other, making $AB=5$ cm, and $AD=8$ cm and complete the rect. $ABCD$ *It is required to draw a similar rectangle of one-third area*

Const. Trisect AD in E, and find AF mean proportional between AD and AE, so that $AF^2=AD.AE$. (*Prob 38, Note*) On AF draw the rect $AFGH$ similar to $ADCB$ Then $AFGH$ is the required rectangle.

Proof. $\frac{\text{rect } AFGH}{\text{rect } ABCD}=\frac{AF^2}{AD^2}$ (Th. 73) $=\frac{AD.AE}{AD^2}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ the rect. $AFGH=\frac{1}{3}$ of the rect. $ABCD$

(ii) $\because \frac{AF^2}{AD^2}=\frac{1}{3}$, $\therefore \frac{AF}{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore AF=\frac{1}{\sqrt{3}}AD=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 8=4.6$ cm



4. Draw any two st lines AB, AD at rt angles to each other such that $AB=8$ cm., and $AD=6$ cm. Join BD, and with centres B and D and radii 8 cm., and 6 cm. draw two arcs cutting in C. Join BC, DC, then $ABCD$ is the required quadrilateral

It is required to draw a similar quadrilateral to contain an area of 36 sq cm

Const. Make BE = *three-fourths* of BC, and find BC' mean proportional between BE, BC so that $BC'^2 = BE \cdot BC$ (*Prob 38, Note*) On BC draw the quadl $BC'D'A'$ similar to the quadl $BCDA$ (*Prob. 39*) Then $BC'D'A'$ is the required quadrilateral

Proof. $\frac{\text{fig } BC'D'A'}{\text{fig } BCDA} = \frac{BC'^2}{BC^2}$ (Th 73) $= \frac{BE \cdot BC}{BC^2} = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{4}$

the quadl $BC'D'A'$ = *three-fourths* of the quadl $BCDA$

Since the quadl $BCDA = \triangle ABD + \triangle BCD$

$$= \tfrac{1}{2} AB \cdot AD + \tfrac{1}{2} BC \cdot CD$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 8 \times 6 + \tfrac{1}{2} \times 8 \times 6 = 48 \text{ sq cm}$$

∴ the area of the quadl $BC'D'A' = \frac{3}{4} \times 48 = 36$ sq cm

∴ $BC'D'A'$ is the required quadrilateral

5. Let ABC be a given circle of radius = 3'. *It is required to divide it into three equal parts by means of two concentric circles*

Const Draw any radius OA, and divide it into three equal parts at B & C. Find OX, OP mean proportionals between OA, OB, and OA, OC respectively, so that $OX^2 = OA \cdot OB$, and $OP^2 = OA \cdot OC$ (*Prob 38, Note*)

With centre O, and radius OX, OP draw two circles XYZ and PQR respectively Then these are the required concentric circles

Proof. Since the area of a circle $= \pi r^2$ [*Page 203*]

$$\therefore \frac{\text{circle } PQR}{\text{circle } ABC} = \frac{\pi OP^2}{\pi OA^2} = \frac{OP^2}{OA^2} = \frac{OA \cdot OC}{OA^2} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{3}$$

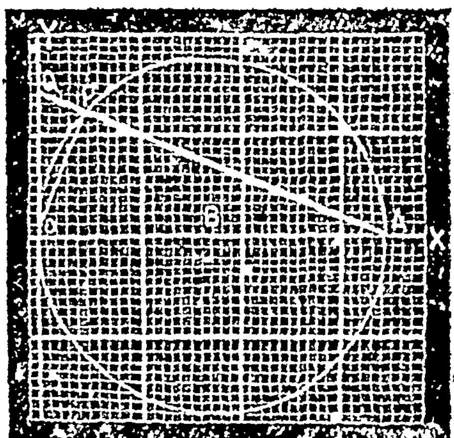
and $\frac{\text{circle } XYZ}{\text{circle } AB'C'}=\frac{\pi . OX^2}{\pi . OA^2}=\frac{OX^2}{OA^2}=\frac{OA . OB}{OA^2}=\frac{OB}{OA}=\frac{2}{3}$

∴ Circle $PQR=\frac{1}{3}$ circle $AB'C'$, and cirle $XYZ=\frac{2}{3}$ circle $AB'C'$

∴ The circle $AB'C'$ is divided into three equal parts by circles PQR and XYZ.

6 See the solution given in your text book,

Exercises on page 301.



1 Polt the pt B whose co-ordinates are (1.7, 0) With centre B and radius OB draw a circle, then it will touch OY at O

From A draw any line AQ cutting the circle at P, and OY at Q *It is required to show that* $AP.AQ$ *is constant.*

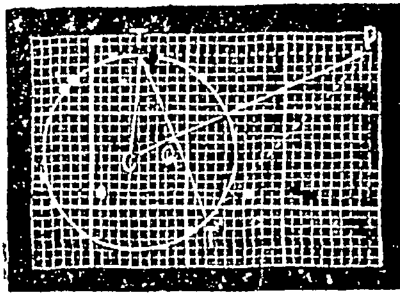
Join OP, then since OA is a diameter hence OPA is a rt. angle (Th 41) Also the $\angle AOQ$ is a rt angle

$$\therefore AP.AQ=OA^2 \qquad \text{(Th 66, Cor)}$$

∴ $AP.AQ$ is constant.

(ii) If 1" is taken as unit of length, then $OA=2OB=3.4"$

$$\therefore AP.AQ=OA^2=(3.4)^2=11.56 \text{ sq. in.}$$



2. Plot the pts C and P whose coordinates are $(5,6)$ and $(29,16)$ respectively.

With centre C and radius 10 draw a circle, and from P draw PT, PT' tangents to this circle.

Join PC and TT', and let PC meet TT' at Q. *It is required to find* (*i*) $CP \cdot CQ$, (*ii*) $PQ \cdot CP$, *and* (*iii*) *the length of* TT'.

Join CT, then CTP is a rt. angle (Th. 46).

Since $PT = PT'$ and CT bisects the $\angle TPT'$ (Th. 47, Cor), therefore PQ is perp. to TT'.

(i) In the rt. angled $\triangle PTC$, TQ is perp. from the rt. angle to the hypotenuse.

$$CP \cdot CQ = CT^2 \quad \text{(Th. 66, Cor.)} = 10^2 = 100$$

(ii) Since $CP = \sqrt{(29-5)^2 + (16-6)^2} = \sqrt{576 + 100} = 26$, hence $PT^2 = CP^2 - CT^2 = 26^2 - 10^2 = 576$

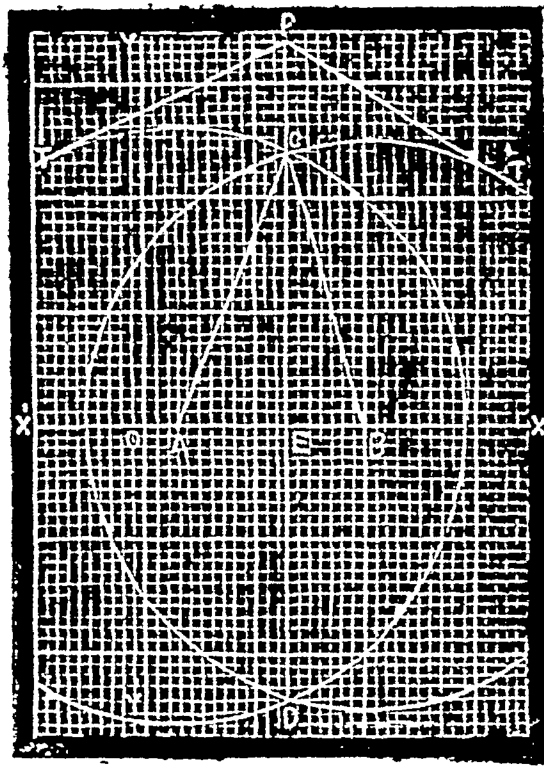
$\therefore PQ \cdot CP = PT^2$ [Th. 66, Cor.] $= 576$

(iii) From (ii) we have $PQ = \dfrac{PT^2}{CP} = \dfrac{576}{CP} = \dfrac{576}{26}$,

$$\therefore CQ = CP - PQ = 26 - \frac{576}{26} = \frac{100}{26}$$

$$\therefore QT^2 = CQ \cdot PQ \text{ [Th. 66, Cor.]} = \frac{576}{26} \times \frac{100}{26}$$

$$\therefore QT = \frac{24 \times 10}{26} = \frac{120}{13}, \quad TT' = 2\,QT = \frac{240}{13} = 18.47 \text{ nearly.}$$



3. Plot the pts A, B and P whose coordinates are $(\cdot 3, 0)$, $(2, 0)$ and $(1\cdot 3, 3\cdot 4)$ respectively.

With centres A & B and radii $2\cdot 6$ and $2\cdot 5$ units draw two circles intersecting at C & D, and from P draw PT, PT' tangents to these circles respectively. *It is required to find* (i) *the coordinates of C and D,* (ii) *the length of CD and* (iii) *the lengths of PT and PT'*

(i) Since AB bisects CD perpendicularly [Prop III, p 143]

$\therefore\ AC^2 - AE^2 = CE^2 = BC^2 - BE^2$

Let $AE = x$, then $BE = AB - AE = (1\cdot 7 - x)$, also $AC = 2\cdot 6$, and $BC = 2\cdot 5$

$\therefore\ (2\cdot 6)^2 - x^2 = (2\cdot 5)^2 - (1\cdot 7 - x)^2$, or $6\cdot 76 - x^2 = 6\cdot 25 - 2\cdot 89 + 3\cdot 4x - x^2$

$\therefore\ 3\cdot 4x = 3\cdot 4$, whence $x = 1$

$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(2\cdot 6)^2 - (1)^2} = \sqrt{6\cdot 76 - 1} = 2\cdot 4$

$CD = 2CE = 4\cdot 8$

(ii) Since $OE = OA + AE = \cdot 3 + 1 = 1\cdot 3$

the coordinates of C are $(1\cdot 3, 2\cdot 4)$, and the coordinates of D are $(1\cdot 3, -2\cdot 4)$.

(iii) Since the *obscissa* of P is 1 3, therefore P lies on the st DC produced.

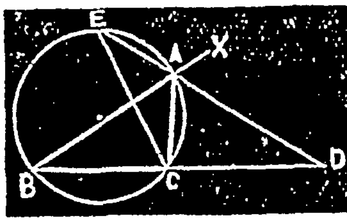
$\therefore$ $PC = PE - CE = 3{\cdot}4 - 2\ 4 = 1$, and $PD = PE + ED = 3\ 4 + 2{\cdot}4 = 5{\cdot}8$

$\therefore$ $PT^2 = PD\ PC =$ [Th 75, Cor,] $5\ 8 \times 1$, $PT = 2\ 4$ nearly

Also $PT'^2 = PD.PC = 5\ 8 \times 1$, $PT' = 2\ 4$ nearly,

$\therefore$ the two tangents are equal and each $= 2\ 4$ nearly

Exercises on page 302.



Let ABC be a triangle, and let the vertical angle A be *externally* bisected by a line which meets BC at D, and the circumcircle at E *It is required to prove that* $AB\ AC = BD\ DC - AD^2$

Since $\angle BAE = \angle XAD = \angle CAD$, therefore by adding $\angle BAC$ to each of these equals we have $\angle EAC = \angle BAD$

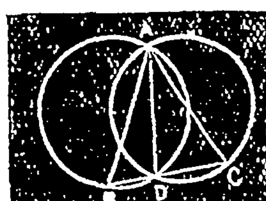
Join EC, then in the $\triangle$s EAC, BAD, because $\angle EAC = \angle BAD$ (*proved*), $\angle AEC = \angle ABC$ in the same segment [Th 39]

$\therefore$ the rem $\angle ACE =$ the rem $\angle ADB$

$\therefore$ the $\triangle$s EAC, BAD are equiangular, $\therefore AE\ AB = AC\ AD$

$$\therefore AB\ AC = AE\ AD$$
$$= (DE - AD)\ AD$$
$$= DE\ AD - AD^2$$
$$= BD\ DC - AD^2 \text{ [Th 75]}$$

Exercises on Page 305.

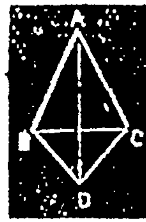


1. Let ABC be an isosceles triangle, and let D be any pt in the base *It is required to prove that the circumscribed circles of the* $\triangle$s ABD, ACD *are equal*

Since the $\angle ABD$=the $\angle ACD$, and those are the angles which the chord AD subtends at the circumferences of the circum-circles of the $\triangle s$ ABD, ACD respectively.

$\therefore$ These circles are equal.

2. Let ABC be an isosceles triangle, and let BD, CD be drawn perp. to AB, AC respectively. *It is required to prove that $BC.AD = 2\,AB\,DB$*



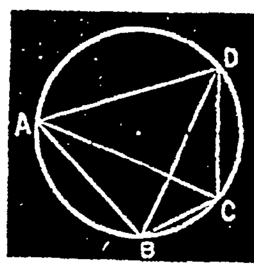
Because ABD, ACD are right angles, therefore the pts A, B, D, C are concyclic, and hence $ABDC$ is a cyclic quadl.

$\because$ $BC\,AD = AB\,DC + AC\,DB$ (Th 78)

$= AB\,DB + AB\,DB$ [$\because DC = DC$, & $AC = AB$

$= 2\,AB\,DB$.

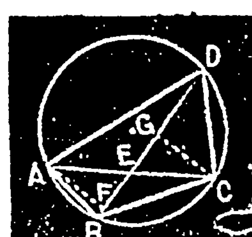
3. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral having its diagonals AC, BD at right angles to each other. *It is required to prove that $AB\,CD + AD\,BC = 2$ the area of $ABCD$*



$AB.CD + AD.BC = AC.BD$ [Th 78]

$= 2$ the area of $ABCD$ [Ex. 8, p. 113]

4. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral such that the diagonal BD bisects AC at E. *It is required to prove that $AD\,AB = DC\,CB$.*



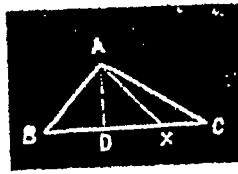
Draw AF, CG perp. to BD. Then in the rt. angled $\triangle s$ AEF, CEG because

$\angle AEF = \angle CEG$ and the hypotenuse $AE = CE$ [*Hyp*]

· the $\triangle s$ are congruent [Th 17], and $AF = CG$.

If d denotes the diameter of the circle, then $AD\ AB = d\ AF$, and $DC\ CB = d\ CG$ [Th 77]

But $AF = CG$ [*Proved*], $AD\ AB = DC\ CB$

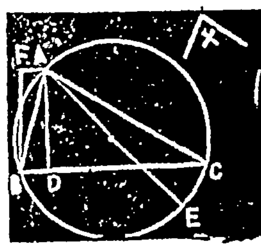


5. Let ABC be a triangle, and let A be joined to any pt X in BC If r, r' denote the circum-radii of the $\triangle s$ ABX, ACX respectively, *it is required to prove that* $r\ r' = AB\ AC$

Draw AD perp to AC If d, d' denote the circum-diameters of the $\triangle$ ABX, ACX, then

$AB\ AX = d\ AD$, and $AC\ AX = d'\ AD$ (Th 77)

. By division we have $AB\ AC = D\ D' = r\ r'$



6. *It is required to construct a triangle having given the base, the vertical angle, and the rectangle contained by the sides.*

Let BC be the given base, and X the given angle Upon BC describe a segment containing an angle $= \angle X$ [*Prob* 24] Then the diameter of this segment, which is the circum-diameter of the required triangle, is known

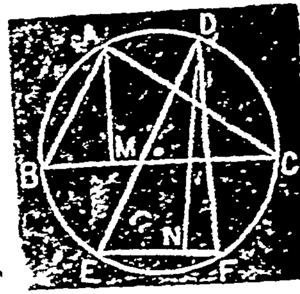
Again since the product of the sides = the circm dimeter $\times$ the altitude [Th 77]

$$\text{the altitude} = \frac{\text{Product of the sides}}{\text{circum-diameter}}, \text{ is also known}$$

From B draw BF perp to BC, making BF equal to the altitude above found. From F draw FA parl to BC cutting the circle at A.

Join AB, AC, then ABC is the required triangle.

7. Let ABC, DEF be two triangles of equal area inscribed in a circle *It is required to prove that the rectangle contained by any two sides of one triangle is to the rectangle contained by any two sides of other as the base of the second is to the base of the first.*



Draw AM, DN perp^r to BC and EF; and let d denote the diametre of the circle.

Since $\triangle ABC = \frac{1}{2} AM \cdot BC$, and $\triangle DEF = \frac{1}{2} DN \cdot EF$

$\therefore AM \cdot BC = DN \cdot EF$, and $\therefore AM : DN = EF : BC$

Again since $AB.AC = d \cdot AM$, and $DE \cdot DF = d \cdot DN$ [Th. 77]

$$\therefore \frac{AB.AC}{DE \cdot DF} = \frac{D \cdot AM}{D \cdot DN} = \frac{AM}{DN} = \frac{EF}{BC} \quad [\textit{Proved}]$$

Similarly it may be proved that $\frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF} = \frac{DF}{AC}$, and $\frac{BC.AC}{EF \cdot DF} = \frac{DE}{AB}$

8. Let P be any pt on the arc BC of the circum-circle of an equilateral triangle ABC Join AP, BP, and CP. *It is required to proved that* $PB + PC = PA$

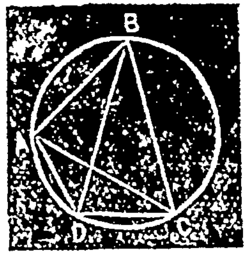
Since $ABPC$ is a cyclic quadrilateral

$\therefore AB \cdot PC + AC \cdot PB = BC \cdot PA$ [Th 78]

or $AB \cdot PC + AB.PB = AB \cdot PA$ [$\because AB = AC = BC$]

$\therefore AB\ (PC + PB) = AB \cdot PA$

$\therefore PC + PB = PA$



9. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral such that BD bisects the $\angle ABC$ If A, C are fixed points, and B variable in position, *it is required to prove that $AB+BC$ BD is a constant ratio*

Since $\angle ABD = \angle CBD$, the arc AD=the arc CD, and hence D being the middle pt of the arc AC is a fixed point

Now $AB\ CD + BC\ AD = AC\ BD$ [Th 78]

or $AB\ AD + BC\ AD = AC\ BD$ [$AD = CD$]

$\quad AD\,(AB+BC) = AC\ BD$

$\quad AB+BC\ \ BD = AC\ AD$

But A, C being fixed points, AC and AD have constant lengths, and hence the ratio $AC\ AD$ is a constant ratio

$\therefore$ $AB+BC . BD$ is also a constant ratio.

10 (i) Area of the triangle whose sides are 21″, 20″ and 13″

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(21+20+13)(-21+20+13)(21-20+13)(21+20-13)}$$

[Ex 7, p 111]

$$=\sqrt{54\times12\times14\times48}=126 \text{ sq in.}$$

$$\therefore\ R=\frac{ABC}{4\Delta}\text{(Th 77, Cor)}=\frac{21\times20\times13}{4\times126}=\frac{65}{6}=10\tfrac{5}{6}$$

(ii) Area of the triangle whose sides are 30′, 25′, and 11′

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(30+25+11)(-30+25+11)(30-25+11)(30+25-11)}$$

[Ex 7, p. 111]

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{66\times6\times16\times44}=132 \text{ sq ft}$$

$$\therefore\ R=\frac{ABC}{4\Delta}\text{(Th 77, Cor)}=\frac{30\times25\times11}{4\times132}=\frac{125}{8}=15\tfrac{5}{8}\text{ ft.}$$

Verify the above results by drawing the figures to some convenient scale

प्रथम बार २००० | १९३० | मू० ।), सजिल्द ।।)

मुद्रक
जीतमल लूणिया
सस्ता-साहित्य-प्रेस
अजमेर

कामना

हिन्दी में वैज्ञानिक साहित्य अभी बहुत समृद्ध नहीं है। विकासवाद का ज्ञान हिन्दी-भाषियों में प्रायः सीमित ही है। ऐसी दशा में मराठी-भाषा की "सजीव सृष्टी ची उत्क्रान्ति" शीषक जीवन-विकास की प्रस्तुत पुस्तक को हिन्दी-भाषियों के सम्मुख रखते हुए हमें हर्ष है। पुस्तक अपने विषय की मानी हुई चीज है। प्रोफेसर सदाशिव नारायण दातार (एम० ए०, बी० एस-सी०) इसके लेखक हैं; और वड़ौदा की 'श्री सयाजी साहित्य-माला' ने अपने विज्ञान-गुच्छ में इसे गूंथा है, जो देशी भाषाओं के साहित्य की अभिवृद्धि करने के लिए ही श्रीमान वड़ौदा-नरेश की सहायता से अस्तित्व में आई है। इसके हिन्दी-अनुवाद के लिए श्रीयुत दातार और वड़ौदा-राज्य के विद्याधिकारी महाशय ने जिस उदारता के साथ सहमति और अनुमति प्रदान की है, उसके लिए हम उनके कृतज्ञ हैं। साथ ही पुस्तक के अधिकांश ब्लाक भी हमे उन्हींसे मिले हैं, जिसके लिए वे धन्यवाद के पात्र हैं। विकासवाद के आचार्य चार्ल्स डार्विन का ब्लाक स्थानीय 'राजस्थान-सन्देश' को कृपा से मिला है, इसलिए वह भी हमारे धन्यवाद का पात्र है।

इस पुस्तक में हिन्दी-पाठको को एक नई और मनोरंजक सामग्री पढ़ने को मिलेगी। जीवन-विकास की पेचीदा पर मनोरंजक बातें पढ़ते-पढ़ते कही उन्हे आश्चर्य होगा, कही हँसी आयगी, और कहीं क्रोध, आश्चर्य नही कि अन्त मे वे बन्दरों को अपने पूर्व-पुरुष मानने को तैयार भी हो जायँ। वे ऐसा मानने को तैयार हो या न हो, इस पुस्तक से कुछ हलचल अवश्य मचेगी। क्या ही अच्छा हो, यदि उससे हिन्दी-संसार मे इस विषयक विशेष ज्ञान की लालसा उत्पन्न हो जाय! ऐसा हुआ तो एक-न-एक दिन हम किसी स्वतंत्र निर्णय पर अवश्य पहुँच सकेंगे। ऐसी लालसा उत्पन्न हो, यही हमारी कामना है।

प्रकाशक

क्या से क्या !

बन्दर से मनुष्य का निर्माण हुआ—यह एक ऐसी बात है कि हम आश्चर्यमग्न हो जाते हैं। हम मनुष्यों के पूर्व-पुरुष बन्दर ! यह सुनकर, हममें से किसे त्वेष न आयगा ? कहाँ तो हम वाणी और बुद्धि वाले सभ्यताभिमानी, और कहाँ बेचारे मूक और अशिक्षित जंगली पशु ! उनका और हमारा क्या सम्बन्ध ? - फिर, सम्बन्ध भी कैसा, वे हमारे पूर्व-पुरुष और हम उनकी सन्तति ! इस बात पर हममें से किसे यक़ीन आयगा ? परन्तु जिस बात पर हमें सहसा विश्वास न होता हो, सरसरी नज़र से देखने में जो हमें प्रायः असम्भव लगता हो, क्या यह ज़रूरी है कि वह असत्य ही हो ? बहुत बार हमारी बुद्धि धोखा खाती है; और जो बात हमें निश्चित-रूपेण सत्य प्रतीत होती है वह असत्य, एवं असम्भव दीखने वाली बात सर्वथा सत्य और सम्भवनीय हो जाती है। अतः कौन आश्चर्य, यदि उपर्युक्त कल्पना भी सत्य हो ?

सृष्टि के निर्माण पर ज़रा विचार कीजिए। अपने आस-पास जो विविध सृष्टि हम देखते हैं—तरह-तरह के प्राणी और वनस्पति जो हमें दृष्टिगोचर होते हैं, वे सब कैसे अस्तित्व में आये ? यह एक मनोरंजक और आश्चर्यपूर्ण प्रश्न है ! साधारणतया दो मत इस सम्बन्ध में पाये जाते हैं। एक तो यह कि परमेश्वर ने जब सृष्टि का निर्माण किया तो उसके साथ ही यह सब विविध रचना भी की; मतलब यह कि जितने

भी प्रकार के विविध प्राणी और वनस्पति आदि हमें आज दिखाई पड़ते हैं, सृष्टि-कर्त्ता ने उन सबका पृथक्-पृथक् एकसाथ निर्माण किया। इसके विपरीत दूसरा मत यह है कि आज हम जो अनेक प्रकार के विविध प्राणी और वनस्पति देखते हैं, सृष्टि के आरम्भ में, वे ऐसे नहीं थे। आरम्भ में उत्पन्न प्राणी एवं वनस्पति तो बिलकुल सरल-सादा थे। बाद में उनमें थोड़ा-थोड़ा परिवर्तन होना शुरू हुआ, जिससे कालान्तर में उनसे कुछ विभिन्न जातियाँ उत्पन्न हुईं। फिर तबसे अबतक बराबर यही क्रम जारी रहने के कारण, धीरे-धीरे, आज दीखने वाले समस्त विविध प्राणियों और वनस्पतियों का विकास हुआ। मतलब यह कि वर्त्तमान विविध सृष्टि एकदम निर्मित न होकर शुरू के कुछ सरल-सादा प्रकारों से बढ़ते-बढ़ते ऐसी हुई है।

इनमें पहले मत को हम जल्दी ग्रहण करते हैं, क्योंकि उसमें न तो दिमाग़ लड़ाना पड़ता है, न वह अस्वाभाविक ही जँचता है। इसके विपरीत दूसरी कल्पना हमें बड़ी भोंडी, अस्वाभाविक अतएव त्याज्य प्रतीत होती है। परन्तु ज़रा गहराई से विचार करें तो हम चौंक पड़ते हैं। जितना जितना सूक्ष्म विचार हम इसपर करें, उतनी ही पहली कल्पना की असत्यता एवं दूसरी की सचाई हमें प्रतीत होती जाती है।

भूमण्डल के अस्तित्व पर हम विचार करें तो हमें मालूम होगा, जैसा कि विज्ञानविद लोग अपनी शोधों के फलस्वरूप बताते हैं, कि पहले तो हमारी यह पृथ्वी भी न थी, हमारा तो कहना ही क्या! पहले तो सत्व, तम और रज से युक्त कोई अव्यक्त एवं विशुद्ध मूलतत्त्व इस विश्व में प्रसृत था, जिसे हमारे यहाँ सांख्य ने 'प्रकृति' कहा है। इसके

बाद उसकी गति और उष्णता में क्रम-क्रम से कमी होते हुए, बाद में, उससे सर्व ग्रहों तथा हमारी इस पृथ्वी की भी उत्पत्ति हुई । उस वक्त तो इसपर रह ही कौन सकता था ? परन्तु फिर क्रमश. पृथ्वी ठण्डी होने लगी; और उसी अनुसार इसपर क्रमशः वायु, जल आदि की उत्पत्ति हुई। फिर वनस्पति और प्राणियों का भी उदय और प्रसार हुआ। यहाँ तक कि आज की स्थिति को यह पहुँच गई है।

यह शङ्का हो सकती है कि हम मनुष्यों से पहले यदि सृष्टि में स्थित्यन्तर होते रहे, जैसा कि कहा गया है, तो भला हमें उनका पता कैसे लगा ? उस समय उन्हें किसने तो लिपिबद्ध किया और कैसे वह हमारे समय तक के लिए सुरक्षित रक्खा गया ? यह प्रश्न सचमुच विचारणीय है; और उस समय का कोई बाक़ायदा इतिहास या अन्य किसी प्रकार का लिखित वर्णन हमें नहीं मिलता, यह भी सत्य है। " परन्तु," बक़ौल हमारे राष्ट्रपति प० जवाहरलाल नेहरू, " चाहे हमारे पास उस प्राचीन काल में लिखी हुई किताबें न हों, फिर भी सौभाग्यवश हमारे पास कई ऐसी चीज़ें हैं कि जो लगभग किताब ही की तरह इस संबंधी बहुत-सी बातें बनाती हैं। पहाड़, चट्टानें,समुद्र, नदियाँ, तारागण, रेगिस्तान और प्राचीन प्राणियों के अवशेष (ठठरियाँ)—ये तथा इसी प्रकार की अन्य वस्तुयें पृथ्वी के आदि-वर्णन की हमारी किताबें हैं और इस (पृथ्वी की) कहानी को समझने का असली तरीक़ा यही नहीं है कि दूसरों की किताबों में इसका वर्णन पढ़ा जाय, बल्कि स्वयं महान् प्रकृति-पुस्तक को ही देखना चाहिए। × × सड़क पर या पहाड़ की तरफ़ पड़े हुए जिन छोटे-मोटे पत्थरों को हम देखते हैं, मानों वह प्रत्येक प्रकृति-पुस्तक

का एक पन्ना है—और, अगर हम उसे पढ़ सकें तो, वह हमें थोड़ी-बहुत बातें बता सकता है। एक छोटे गोल-चमकदार पत्थर के टुकड़े को ही देखें, तो क्या वह हमें कुछ नहीं बताता ? बिना नोक-कोनों या किसी प्रकार की धार के वह गोल, चिकना और चमकदार कैसे हुआ ? अगर किसी बड़ी चट्टान के छोटे-छोटे टुकड़े किये जायँ तो उनमें का प्रत्येक टुकड़ा खुरदरा, आड़ा-टेढ़ा और कोने-धार वाला होता है। गोल-चिकने पत्थर (Pebble) जैसा बिलकुल नहीं होता है। तब वह ऐसा गोल, चिकना और चमकदार कैसे बना ? अगर आँख देखने और कान सुनने की सामर्थ्य रखते हों, देख सुन सकें, तो वह हमें अपनी कहानी सुनाता है। वह कहता है कि एक समय—वह समय अत्यन्त प्राचीन क्यों न हो—वह एक चट्टान का ऐसा ही टुकड़ा था, जैसा कि बहुत-से नोक-कोनों वाला टुकड़ा किसी बड़ी चट्टान या पत्थर को तोड़ने पर निकलता है। सम्भवतः वह किसी पहाड़ के किनारे पड़ा रहा। वर्षाऋतु में वर्षा का पानी उसे पहाड़ की छोटी घाटी में बहाकर चश्मे तक ले गया, जहाँ से धक्का खाते-खाते वह एक छोटी नदी में जा पहुँचा। छोटी नदी उसे बड़ी नदी में लेगई। इस तमाम समय नदी की सतह में घिसटते-घिसटते उसके नोक-कोने खिर गये और उसका खुरदरापन मिटकर वह चिकना-चमकदार हो गया। इस प्रकार वह गोल-मटोल चिकना-चमकदार टुकड़ा बना, जिसे हम देखते हैं। किसी प्रकार नदी से वह अलग आ पड़ा और हमें वह मिल गया। अगर वह नदी से अलग न होता और उसके साथ-साथ बहता रहता तब तो वह और भी छोटे-से छोटा होता जाता और अन्त में रेत का कण बनकर अपने अन्य भाइयों के साथ समुद्र-तट को

सुन्दर बनाता, जहाँ छोटे बच्चे रेत के महल बना-बनाकर खेल सकते हैं।"*

प० जवाहरलाल का कहना है—"जब कि पत्थर का एक छोटा टुकडा इतनी बातें बता सकता है, तब पहाड और चट्टाने तथा दूसरी बहुत-सी चीज़ें जो हम अपने आस-पास देखते हैं, उनसे हम कितना ज़्यादा जान सकते हैं ?" † विज्ञानवेत्ताओं ने सचमुच यह जानने की कोशिश की भी है। और आज सृष्टि की उत्पत्ति और विकास की जो बातें हमें उपलब्ध हैं, वे उन्हींके लगातार प्रयत्नों का परिणाम है। प्राच्य-प्राणि-शास्त्र और प्राच्य-वनस्पति-शास्त्र, विज्ञान के इन दो विभागों का काम ही पुराने-से-पुराने प्राणियों और वनस्पतियों के अवशेषों को ढूँढ कर उनपर से उस-उस समय की स्थिति का पता लगाना है।

इसी शोध के फल-स्वरूप वैज्ञानिकों का कहना है, मनुष्य जिन्हें आज हम देखते हैं सृष्टि के आरम्भ से ही ऐसे-के-ऐसे नही चले आ रहे हैं। आरम्भ में तो वातावरण ही ऐसा था कि मनुष्य ही नहीं, पशु-पक्षी, जीव-जन्तु भी यहाँ न रह सकते थे। जड़ से सृष्टि का आरम्भ हुआ।

---

* Letters from a Father to his daughter, pp 3-4. [प० जवाहरलाल नेहरू इस विषय के मर्मज्ञ है, यह शायद बहुतो को मालूम न होगा। कईयों को यह जानकर शायद अचरज भी हो कि वास्तव में प्रकृति-विज्ञान के विषयों में ही उन्होने इंग्लैण्ड में एम० ए० पास किया था। उनकी हाल ही प्रकाशित हुई इस पुस्तक ने इस रहस्य का उद्घाटन कर दिया है।]

† वही, पृ० ४।

फिर जैसे-जैसे वातावरण वदलता गया—अर्थात् पृथ्वी में ताप घटकर ठण्डक होती गई, उसके अनुसार जीव-सृष्टि भी निर्मित और विकसित हुई। "सबसे पहला पौधा प्रोटोकोकस माना जाता है, जिससे बाद को पुच्छ वृक्ष, छत्र-वृक्ष, वहुपत्रक फ़र्न, और अन्त में फल फूल वाले पौधों का जन्म हुआ। यह तो पौधों के विकास का क्रम है। पशुओं में सबसे पहले बिना रीढ़ की हड्डी और बिना खोपड़ी वाले जलचरों में सम्भवत बहुत छोटी आरम्भिक मछलियों का जन्म हुआ। ..इसके पश्चात् रीढ़ की हड्डी वाले और खोपडी वाले जीवों की उत्पत्ति हुई। तत्पश्चात् जिस युग में वनस्पति-जगत के फ़र्न-वृक्ष पृथ्वी के अधिकाश भाग को ढके हुए थे, उस समय मछलियों की उत्पत्ति हुई। छत्राकार वृक्षों के समय उरग या सरीसृप अर्थात् साँप के समान पेट से चलने वालों (Reptiles) का जन्म हुआ। फल फूल वाले वृक्ष जब पैदा हुए तब दूध पिलाने वाले पशुओं का अवतार हुआ और सबसे अन्त में मनुष्य का अवतार हुआ।"* सक्षेप में कहे तो, जीव-सृष्टि का आरम्भ शंखोत्पादक प्राणियों से हुआ, फिर सरीसृप, मत्स्य, सस्तन और उन सस्तन प्राणियों के विविध प्रकारों में से मनुष्यनुमा बन्दर होकर उनसे हम मनुष्यों का अवतरण हुआ है। यही विकासवाद है—और, इसके अनुसार, मनुष्य अबतक होने वाली सृष्टि की अन्तिम और सर्वोत्तम कृति है।

प्राणी और उसके आस-पास की परिस्थिति (The Organism and its environment), ये दो विकास के मुद्दे हैं। † जब-जब

* 'विज्ञान' (दिसम्बर १९२९), पशुओं का अवतार, पृ० ११२।
† New Age Cyclopaedia (Vol. IV), P. 299.

कोई परिवर्तन होता है तब-तब एक नई परिस्थिति उत्पन्न होकर उसमें टिक सकने की समस्या उत्पन्न होती है—शास्त्रीय भाषा में कहें तो, जीवन के लिए संघर्ष या कलह उत्पन्न हो जाता है। ऐसी हालत में यह आवश्यक है कि उस परिवर्त्तित स्थिति के अनुसार बना जाय, नहीं तो अस्तित्व असम्भव है। यही कारण है कि परिस्थिति में जैसे-जैसे परिवर्त्तन होता जाता है, उसीके अनुसार प्राणियों की शरीर-रचना भी बदलती जाती है—और फिर, आनुवंशिक संस्कारों के अनुसार, भावी पीढ़ियों में वह फ़र्क़ लगातार बढ़ते हुए अन्त में उन प्राणियों के सारे रंग-रूप ही बदल जाते हैं। यही विकासवाद की मूल कल्पना है। इसीको प्राकृतिक और वैषयिक चुनाव में विभक्त किया गया है, जिससे कि इस परिवर्त्तन को समझने में सहूलियत होती है।

आधुनिक रूप में इसका प्रतिपादन पश्चिम से हुआ है; और जिन्होंने इसकी शोध की है, उनमें चार्ल्स डार्विन सबसे प्रमुख है। मूल कल्पना तो उससे पहले ही उठ चुकी थी, परन्तु उसे सुलझा हुआ और व्यवस्थित रूप उसीने दिया। उसने तथा अन्य विकासवादी विज्ञानवेत्ताओं ने विविध शोधों और प्रमाणों द्वारा विकास का चित्रपट तैयार करके यह सिद्ध कर दिया है कि मनुष्य ही जीव-सृष्टि की अन्तिम रचना है और उसका विकास बन्दरों से हुआ है। यहाँ पशुओं और मनुष्यों के फ़र्क़ का जो प्रश्न उठता है, शास्त्रज्ञों ने, विविध उदाहरणों द्वारा, उसका भी समाधान किया है। बुद्धिमत्ता और वाणी, ये दो ऐसी चीज़ें हैं कि जिनपर हम मनुष्यों को गर्व है और हम पशुओं के वंशज होने का विरोध करते हैं; पर विज्ञानवेत्ताओं ने दोनों की इस विषयक तुलना करके

हमारे इस गर्व को भ्रमात्मक सिद्ध कर दिया है। उन्होंने सिद्ध किया है कि पशुओं में भी हमारी तरह मन व बुद्धि है, उनकी अपनी वाणी भी है, यह दूसरी बात है कि उनमें ये चीज़ें हमारे जितनी विकसित नहीं हैं—हमसे घटकर हैं। परन्तु किसी गुण का कम-ज़्यादा विकास तो हम मनुष्यों में परस्पर भी तो होता है—बालक और बड़े की वाणी-बुद्धि में, ऐसे ही जंगली और सभ्य मनुष्यों में भी, इन सब विषयों में काफ़ी अन्तर रहता है।

जीवन-विकास की इन्हीं सब बातों का प्रस्तुत पुस्तक में वर्णन है। पुस्तक के लेखक प्रोफ़ेसर सदाशिव नारायण दातार (एम० ए०, बी० एस-सी०) इस विषय के विद्वान हैं, अतएव उनका वर्णन सिलसिलेवार के साथ ही सरल और रोचक है। जहाँ अंग्रेजी में इस विषय की अनेक छोटी-बड़ी पुस्तकें हैं, वहाँ देशी भाषाओं में उनका अभाव है। यह एक खटकने वाली बात है। इसी भावना से प्रेरित होकर, इस विषयक कई अंग्रेज़ी पुस्तकों के आधार पर, आपने मराठी में इसे लिखा। जो लाभ इससे मराठी-भाषियों को हुआ, हिन्दी-भाषी भी उससे वञ्चित न रहें, इस ख़याल से बड़ी उदारता से आपने उसके हिन्दी-अनुवाद की आज्ञा दी है। उसीके अनुसार यह हिन्दी-रूप मौजूद है।

एक बात ध्यान रखने की है। विकासवाद का जबसे उदय हुआ है, यह विवाद का प्रश्न रहा है। अपने पूर्वग्रहों के कारण मनुष्य इस बात को सुनते ही चिढ़ उठते हैं कि हम बन्दरों की औलाद हैं, इसलिए उचित-अनुचित युक्तियों से वे इसका विरोध करते ही रहते हैं। साथ ही इसके समर्थक भी अपने जोश और खिलाफ़त में कभी-कभी सीमा से

बढ़कर इसका प्रतिपादन करने लगते हैं। यही कारण है कि दोनों के बीच की खाई मिट नहीं पाती। प्रस्तुत पुस्तक में इन बातों से ऊपर उठने का प्रयत्न किया गया है। विवादास्पद बातों को जहाँ तक हुआ छोड़ कर केवल ऐसी ही बातों पर विचार किया गया है कि जो सामान्यत, सबको मान्य हो सकती हैं। साथ ही, जहाँ ज़रूरत हुई, विकासवादियों पर टीका भी की गई है। आम तौर पर यह जो समझा जाने लगा है कि विकासवाद का मतलब लगातार प्रगति होते रहना ही है, इसे भ्रमात्मक सिद्ध किया गया है। यह ज़रूर है कि सृष्टि-विकास के उदाहरण में हमें अभी तक प्रगति ही हुई दिखाई पड़ती है, पर यह ज़रूरी नहीं कि हमेशा प्रगति ही होती रहे। लेखक का मत है, "विकास के साथ प्रगति ही होनी चाहिए, यह कल्पना ग़लत है। विकास के साथ जैसे प्रगति होना सम्भव है, वैसे ही अवनति भी हो सकती है।" क्योंकि, असल में तो यह परिस्थिति पर निर्भर है, परिस्थिति अच्छी हो तो प्रगति होगी, और अच्छी न होगी तो अवनति होगी। इस स्पष्टीकरण से, आशा है, बहुतों का समाधान हो जायगा और वे इस सम्बन्धी अपनी ज़िद पर अड़ने के बजाय अपनी सारासार-बुद्धि से इसपर विचार करेंगे।

अजमेर,
श्री वसन्तपञ्चमी, १९८६।

मुकुटबिहारी वर्मा

?

चित्र-सूची

22 S.V

जीवन-विकास

उन्नीसवीं शताब्दी के बौद्धिक एवं वैज्ञानिक वातावरण में यूरोप के अन्दर जो अनेक उलट-फेर हुए, उनमें विकासवाद का प्रमुख स्थान है, और इसका कारण है विकासवाद की अत्यन्त व्यापकता। विकास की कल्पना यद्यपि प्रधानतः प्राणि-शास्त्री, वनस्पति-शास्त्री एवं भूगर्भ शास्त्रियों से निकली है और प्राणि-शास्त्र, वनस्पति-शास्त्र एवं भूगर्भ-शास्त्र के द्वारा ही उन्होंने इसे सिद्ध किया है, तथापि यह तत्त्व इतने व्यापक स्वरूप का है कि अनेक दूसरे शास्त्रों पर भी इसका थोड़ा-बहुत असर हुए बिना न रहा। × × यह कहने में भी कोई आपत्ति नहीं कि आधुनिक समाजशास्त्र की सारी इमारत ही विकासवाद पर स्थापित है। × ×

× × × इस सिद्धान्त के कारण हमारे सम्बन्ध की मानव-जाति की कल्पना बिलकुल बदल गई है। विकासवाद ने सृष्टि के प्रति मनुष्य के दृष्टिकोण को बिलकुल बदल दिया है। × ×

× × × मनुष्यों की आँखों में अहंकार और पूर्वग्रह का जो रोग छाया हुआ था, विकासवाद ने उसे नामशेष कर दिया; उनकी आँखों का पर्दा हट जाने से उन्हें सारी सृष्टि अपने यथार्थ स्वरूप में दीखने लग गई—और, इस प्रकार, सत्यान्वेषण का मार्ग खुल गया।

१

विकासवाद

अपने चारों तरफ अगर हम नजर डालें, तो सृष्टि मे तरह-तरह के पदार्थ हमे दिखाई देंगे। भिन्न-भिन्न शास्त्रवेत्ताओं ने उन सभी पदार्थों का, अपने-अपने शास्त्रों की सुविधा के अनुसार, भिन्न-भिन्न रीति से वर्गीकरण किया है। उदाहरण के लिए, पदार्थविज्ञान-शास्त्र मे इन सब पदार्थों की स्थिति का विचार करके घनरूप, द्रवरूप और वायुरूप नाम से इनका वर्गीकरण किया गया है। रसायन-शास्त्र में इन्ही पदार्थों का वर्गीकरण सेन्द्रिय और निरिन्द्रिय के रूप में हुआ है। इसी प्रकार हम भी अपने विषय के अनुरूप ही इन पदार्थों का वर्गीकरण

करेंगे। अर्थात्, आरम्भ में, इन सब पदार्थों को हम दो भागों मे विभक्त करेंगे—एक जीव और दूसरा निर्जीव।

इस वर्गीकरण में, एक बात पर हमें ध्यान रखना होगा। वह यह कि जीव शब्द का व्यवहार यहाँ जरा व्यापक रूप में किया गया है, जब कि निर्जीव शब्द का कुछ संकुचित अर्थ में किया गया है। मामूली तौर पर जीव शब्द से केवल प्राणियों (जीवधारियो) का बोध होता है, वनस्पतियों का नही, परन्तु यहाँ जीव शब्द के अन्दर प्राणी और वनस्पति दोनों का समावेश किया गया है। क्योंकि डा० जगदीशचन्द्र वसु की खोजो से अब यह एक प्रकार से सिद्ध ही हो चुका है कि प्राणियो के समान ही वनस्पतियों मे भी न केवल हलचल, श्वासोच्छ्वास आदि क्रियाये ही होती हैं, बल्कि वे प्राणियो की भाँति संवेदना (सुख, दुःख आदि) का भी अनुभव करते हैं। ऐसी दशा मे, जैसा कि ऊपर कहा गया है, जीव शब्द का व्यापक अर्थ मे उपयोग करना किसी प्रकार अनुचित या आपत्ति-जनक नही है। अस्तु।

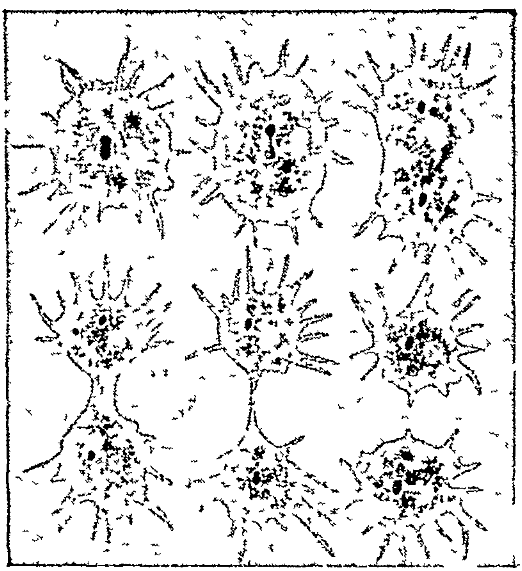
इस प्रकार सब पदार्थों के दो भाग कर देने पर, अब हम पहले उनमे से जीव-सृष्टि पर विचार करेंगे। जीव-सृष्टि को भी, जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है, हमे प्राणी और वनस्पति इन दो मुख्य भागो मे बाँटना होगा। इनमे भी वनस्पतियो पर विचार करने बैठें तो अनेक वनस्पतियाँ ऐसी मिलेंगी, जो एक-दूसरे से

बिलकुल ही भिन्न हैं। एक ओर पानी पर जमने वाली काई जैसी अनेक वनस्पतियाँ ऐसी दिखाई पड़ेंगी, जो अत्यन्त क्षुद्र और साधारणतः निरुपयोगी हैं; दूसरी ओर बड़, पीपल, सागौन, चीढ़ जैसे बड़े-बड़े और मनुष्योपयोगी अनेक वृक्ष भी हमें मिलते हैं। वनस्पति ही क्यों, प्राणियों मे तो यह विरोध और भी बृहद् परिमाण में दिखाई पड़ता है। प्राणियों मे कुछ जीव-जन्तु तो इतने ज़रा-से होते हैं कि सूक्ष्म-दर्शक यन्त्र की मदद के बिना सिर्फ आँखों से तो वे दिखाई ही नहीं पड़ते। धारण-पोषण की उनकी क्रिया बड़ी सादी है; और हाथ, पैर, पेट आदि जो अवयव साधारणतया प्राणियों में होते हैं उनका इनमें चिह्न तक दृष्टिगोचर नहीं होता। चित्र नं० १ में प्रदर्शित प्राणी इसी प्रकार का है। यह प्राणी कीचड़ या पानी के गड्ढे मे पाया जाता है। इसका शरीर सिर्फ एक, और वह भी अत्यन्त सूक्ष्म, कोश का बना होता है। मगर सूक्ष्म-दर्शक यंत्र लगाकर थोड़ी देर तक ग़ौर से अगर हम इसे देखें, तो हमें पता लगेगा कि अन्य प्राणी जिस प्रकार खाने, पीने, सन्तानोत्पत्ति आदि की क्रियायें करते हैं वैसे ही यह भी अपने सब व्यवहार कर सकता है। इसके शरीर के चारों तरफ हाथों की अंगुलियों की नाई जो भाग आगे को निकले हुए दीखते हैं, थोड़ी देर के लिए उन्हें हम इसके पैर समझ लें तो, वे पैर तो बराबर हिलते ही रहते हैं। इसके खाने-

योग्य कोई प्राणी इसके पास आया नहीं कि तुरन्त ही इसने अपने पैरों को उसके नीचे फैलाकर झट उसे निगला नहीं! इसे ज़रा धक्का दिया नहीं कि, चोट के भय से, अपने पैरों को सिकोड़ कर तुरन्त स्तब्ध हो जाता है और कुछ देर वैसा ही बना रहकर फिर पूर्ववत् ही अपना अमल-दरामद शुरू कर देता है। सन्तानोत्पत्ति का इसका ढङ्ग बड़ा सादा है, जैसा कि चित्र नं० २ में बताया गया है। इसके शरीर को जैसे-जैसे पोषण मिलता जाता है, वैसे वैसे इसके आकार मे भी वृद्धि होती जाती है। आरम्भ मे तो इसके एक-कोश मय शरीर के अन्दर, चित्र मे जहाँ काले बिन्दु से केन्द्र बनाया गया है, दो भाग होते है; पश्चात शेष शरीर के भी दो भाग होने लगते हैं; और अन्त मे, दोनों भाग पृथक्-पृथक् होकर, स्वतंत्र रूप से अपना-अपना जीवन-यापन करने लगते हैं। अमीबा (Amoeba) इनका नाम है।

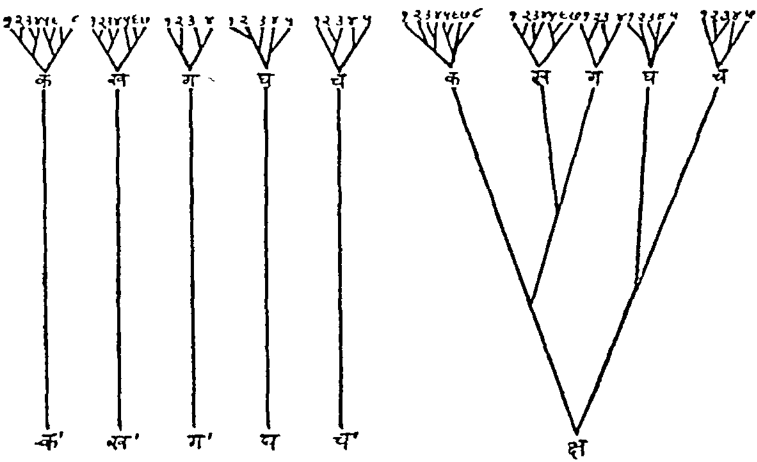
यह, अर्थात् अमीबा, तो हुआ अत्यन्त सूक्ष्म और सादा प्राणियों का उदाहरण, परन्तु जो प्राणी इनके भक्ष्य होते हैं वे और भी कितने छोटे होंगे, इसकी कल्पना स्वयं पाठक ही करले। इसके विपरीत बाघ, सिंह, हाथी इत्यादि अनेक प्रकार के ऐसे प्राणी भी इस जीव-सृष्टि मे हमे दिखाई पड़ते है जो खूब बड़े, ऊँचे दर्जे के, और सर्व-इन्द्रिय-सम्पन्न हैं। और मनुष्य ने तो अपनी बुद्धि के सामर्थ्य से इनसे भी ऊँचा स्थान प्राप्त कर लिया है।

चित्र नं० १



अमीबा और उसका विभाजन

चित्र नं० २



उत्पत्ति

विकास

तरह-तरह के इन प्राणियों और एक-दूसरे से बिलकुल विभिन्न दीखने वाले असंख्य वनस्पतियों पर यदि हम किञ्चित दृष्टिपात करें, तो सहज ही हमारे मन में यह प्रश्न उठता है—"तरह-तरह के ये सब जीव भला कैसे उत्पन्न हुए होंगे ?" प्रस्तुत पुस्तक में इसीपर विचार किया जायगा।

जीव-सृष्टि की उत्पत्ति पर विचार करते समय, वैसे तो, उसके साथ ही निर्जीव सृष्टि की उत्पत्ति का भी वास्तविक विचार करना अवश्यक है; परन्तु विस्तार-भय से अभी हम इस प्रश्न को स्थगित ही रक्खेंगे। इसी प्रकार, जीव-सृष्टि की उत्पत्ति पर विचार करते समय, प्रारम्भ में इस बात पर भी विचार करना आवश्यक है कि निर्जीव या जड़ से जीव या चेतन की सृष्टि कैसे हुई ? यह प्रश्न अत्यन्त विवादास्पद परन्तु साथ ही मनोरञ्जक भी है। मगर फ़िलहाल तो इसपर भी हम विचार नहीं कर सकते। जिस किसी भी तरह हो, हम तो अभी इन बातों को गृहीत ही मान लेते हैं कि सृष्टि में पहले निर्जीव या जड़ की उत्पत्ति हुई और फिर उस-से जीव की हुई। इन दोनों बातों को गृहीत मानकर यहाँ हमें जिस बात पर विचार करना है वह तो ख़ास तौर पर यही है कि इसके बाद विविध वनस्पतियों और प्राणियों के द्वारा जीव ने जो अनन्त रूप धारण किये वे उसे कैसे प्राप्त हुए ? जीव-सृष्टि का जो अपार विस्तार आज हमें दिखाई पड़ रहा है वह कैसे हुआ ?

अथवा इस भूतल पर असंख्य वनस्पति और प्राणियों का जो बृहद् जाल-सा फैला हुआ हमें दिखाई पड़ता है उसके भिन्न-भिन्न धागे कैसे बने होंगे ?

इस प्रश्न पर जरा ध्यान के साथ विचार करें, तो सामान्य मनुष्य को इसके दो ही उत्तर सूझ सकते हैं। एक तो यह कि जीव-सृष्टि को आज हम जिस रूप में देख रहे हैं जगत् के आरम्भ में भी यह ठीक इसी प्रकार की थी और आरम्भ से लेकर आज-पर्यन्त वह ज्यों की त्यों ही चली आ रही है। आम या गुलाब के जो दरख्त आज हम देखते हैं, उनका मूल भी ऐसा ही था, अर्थात्, आरम्भ ही से वे ऐसे के ऐसे ही चले आ रहे हैं। कुत्तों के जो विविध प्रकार आज हमें दीखते हैं, सृष्टि के आदि में भी वे इसी प्रकार थे। अर्थात्, आज जो 'बुलडाग' हम देखते हैं उसके पूर्वजों को भी अनादिकाल में परमेश्वर ने मानों ठीक ऐसा का ऐसा घड़ा था। आज हमें जो 'ग्रेहाउण्ड' दीखते हैं उनके आदि-पुरुष भी मानों इसी प्रकार के थे। मतलब यह कि आज हमें तरह-तरह के जो वनस्पति एवं प्राणी दृष्टिगोचर होते हैं, इस उपपत्ति के अनुसार सृष्टि के आरम्भ में ही वे ठीक ऐसे-ही निर्मित हुए थे और वर्तमान जीव-सृष्टि मानों उनका विस्तार-मात्र है। यह तो एक विचार-शैली हुई। पर इसके विपरीत भी एक विचार-शैली है। वह यह कि आज हम जो प्राणी और वनस्पति

देखते हैं, पहले, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन—आदि—काल में, वे आज जैसे बिलकुल न थे। सृष्टि के आरम्भकाल में उत्पन्न प्राणी और वनस्पति तो बिलकुल सरल-सादा थे; आज उनमें जो विविधता आ गई है, उसका तो उस समय उनमें लेश-मात्र न था। बाद में धीरे-धीरे वनस्पति और प्राणियों मे थोड़ा-बहुत फेर-बदल होने लगा, जिससे कालान्तर मे कुछ विभिन्न ही प्राणी एवं वनस्पति उत्पन्न हुए। और पूर्वकाल से आज-पर्यन्त अनेक वर्षों से यही क्रम ज्यो का त्यो जारी रहने के कारण ही प्रारम्भ के अत्यन्त सादा व थोड़े-से वनस्पति एवं प्राणियो से ही आज दीखने वाले सब विविध प्राणियों और वनस्पतियो का विकास हुआ है।

जीव-सृष्टि की उत्पत्ति के सम्बन्ध में यही दो परस्पर विरोधी उपपत्तियाँ उपलब्ध है; इनके अतिरिक्त, और कोई उपपत्ति हमारे देखने मे नही आई। इनके अनुसार, एक दृष्टि से तो, यह कहना चाहिए कि इस जीव-सृष्टि में आरम्भ से लेकर आज-पर्यन्त कोई एक भी फेर-बदल या परिवर्तन नही हुआ। प्राणी और वनस्पतियो के जितने प्रकार आज हम देखते हैं उनका प्रत्येक का सृष्टि के आरम्भ मे ईश्वर ने स्वतंत्र रूप से ही निर्माण किया था और आज तक वही सब प्रकार (जातियाँ या क़िस्में) ठीक उसी रूप मे चले आ रहे हैं। इसके विपरीत, दूसरी दृष्टि से हम यह कहेंगे कि सृष्टि मे लगातार परिवर्तन होता चला आ रहा

है। आज हमे जो विविध प्राणी एवं वनस्पति दृष्टिगोचर होते हैं, सृष्टि की उत्पत्ति के समय, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन—अनादि—काल मे, उनके पूर्वज भी ठीक ऐसे ही नहीं थे। उस समय पैदा होने वाले जीव-जन्तु तो अत्यन्त सादा और सूक्ष्म थे। बाद मे, ज्यों-ज्यो समय बीतता गया, धीरे-धीरे उनमे कुछ-कुछ भिन्नता होती गई। कालान्तर में, इससे उनमे मे कुछ निराले ही और ऊँचे दर्जे के प्राणियों का आविर्भाव हुआ; और, यही क्रम आज भी ऐसा ही चला आने के कारण, आज की यह अपार जीव-सृष्टि भी उन्हींसे उत्पन्न हुई है। मतलब यह कि जो जीव-सृष्टि आज हमें दिखाई पड़ती है, इस उपपत्ति के अनुसार, उसका निर्माण आरम्भ में निर्मित कुछ थोड़े से प्राणियो और वनस्पतियो से ही हुआ था। परन्तु उसके बाद उन अल्पसंख्यक जीवो का उसी प्रकार पीढ़ी-दर-पीढी विकास होता गया, जैसे कि किसी बीज से बढ़ते-बढ़ते कालान्तर मे प्रचण्ड वृक्ष खड़ा हो जाता है, और उसीके फल-स्वरूप, उस विकास के लगातार होते रहने से, आज की इस अपार जीव-सृष्टि के रूप में उनका विस्तार हो गया। इस दूसरे प्रकार की उपपत्ति का ही नाम 'विकासवाद' है। 'विकास' शब्द संस्कृत-भाषा का है; और इसका अर्थ है—प्रसार, फैलाव . क्रमशः उन्नत होना।* अंग्रजी के 'इवॉल्यूशन' (Evolution)

* हिन्दी-शब्दसागर; पृष्ठ ३१२४।

शब्द के अर्थ में यह प्रयुक्त है, जिसका धात्वर्थ है—किसी लिपटी याँ उलझी हुई वस्तु को खोलना या सुलझाना। इस प्रकार, इस-पर से, इस शब्द का अर्थ हुआ—किसी पदार्थ का एक स्थिति से निकल कर उसमे अपेक्षाकृत अधिक प्रसृत किंवा अधिक प्रशस्त अन्य स्थिति मे प्रवेश करना। इसी प्रकार जिस क्रिया के द्वारा पदार्थ-मात्र एक स्थिति से क्रम-पूर्वक बढ़ते हुए अपेक्षाकृत विस्तृत स्थिति मे प्रवेश करते हैं, उसका नाम है विकास; और किसी प्राणी का विकास होना मानो उस प्राणी की जाति में क्रमशः परिवर्तन होते हुए कालान्तर में उससे भिन्न प्रकार की एक नई ही किस्म या जाति का उत्पन्न होना है।

जिन दो उपपत्तियो का ऊपर वर्णन किया गया है, सरसरी नजर डालने पर, उनमे से पहली ही ठीक मालूम होगी, जब कि दूसरी सम्भवत. केवल अशक्य और इसलिए त्याज्य प्रतीत होगी। क्योकि, अपने जीवन-काल में, दूसरी उपपत्ति के अनुसार होनेवाला अन्तर हम कही नही देख पाते। विकासवाद के सिद्धान्तानुसार तो किसी एक प्राणी से क्रम-पूर्वक न केवल अन्य प्राणियो की उत्पत्ति ही सम्भव है; बल्कि इस समस्त जीव-सृष्टि की उत्पत्ति भी इसी क्रम के अनुसार हुई है। परन्तु हम तो अपने जीवन मे बिल्ली से कुत्ते, अथवा कनेर के पेड़ से गुलाब के दरख्त, पैदा होते नहीं देखते; उलटे हमे तो प्रत्यक्ष यही दिखाई पड़ता है कि

कई पीढ़ियाँ गुजर जाने पर भी कुत्तों से कुत्ते ही पैदा होते हैं और कनेर के पेड़ में कनेर ही के फूल लगते हैं। यही कारण है कि विकास के सिद्धान्त के बारे मे, शुरू मे, हमे शङ्का ही होती है।

लेकिन अगर हमारे जीवन मे कोई बात होती हुई हमे नहीं दिखाई पड़ती तो इसका मतलब यह नही कि वह कभी हो ही नही सकती। कल्पना कीजिए कि भरपूर वसन्त-ऋतु मे, जब कि चारो ओर फूल ही फूल दृष्टिगोचर होते हैं, एक भौरा पैदा होता है। और वसन्त के समाप्त होने से पहले ही उसका अल्पकालिक जीवन समाप्त हो जाता है। इस प्रकार जबतक वह जीवित रहा उसके सब दिन किसी रम्य उपवन मे एक पुष्प से दूसरे पुष्प पर उड़ते हुए ही बीते। ऐसी दशा मे पृथ्वी का पृष्ठभाग उसके लिए तो मानो एक सुन्दर-सुगन्धित पुष्पोद्यान ही रहा। अतएव उसकी सहज कल्पना यही होगी कि इस पृथ्वीतल पर सदा-सर्वदा वसन्त-ऋतु ही छाई रहती है! परन्तु उसकी ऐसी कल्पना कितनी संकुचित एवं अदूरदर्शिता पूर्ण है, यह कौन नही जानता? इसी प्रकार हमारी उक्त विचार-शैली भी न केवल इतनी ही प्रत्युत इससे भी अधिक संकुचित न होगी, ऐसा कौन कह सकता है? क्योकि, शोधको के मतानुसार, सृष्टि पर जीवोत्पत्ति हुए न्यूनातिन्यून ३–४ करोड़ वर्ष तो हो ही चुके हैं। तब, इस विस्तृत काल

के दर्म्यान क्या-क्या पदार्थ बने, इसका अनुमान केवल एकाध डुबकी लगाकर ही कैसे लगाया जा सकता है ?

सारांश यह कि जीव-सृष्टि की उत्पत्ति के सम्बन्ध में जो दो उपपत्तियाँ दी गई हैं उनके सम्बन्ध में सहसा यह नहीं कहा जा सकता कि उनमे से एक शक्य और दूसरी अशक्य अतएव त्याज्य है। क्योंकि, जैसा कि उपर्युक्त विवेचन से पाठक समझ गये होंगे, दोनो उपपत्तियाँ एक समान ही शक्य हैं।

इस सम्बन्ध के ऐतिहासिक वर्णन को देखें तो मालूम होगा कि जीव-सृष्टि की उत्पत्ति-सम्बन्धी इन दोनो उपपत्तियो के संबंध में न केवल आज से बल्कि बहुत प्राचीन काल से ऐसी ही अस्पष्ट कल्पना सर्व-साधारण मे चली आ रही है। ईस्वी सन् से ६०० वर्ष-पूर्व जो ग्रीक पण्डित हो गये हैं उनके ग्रन्थ में पहली आपत्ति-संबंधी विचार तो मिलते ही हैं; परन्तु आश्चर्य की बात यह है कि दूसरे अर्थात् साधारणतः अर्वाचीन माने जाने वाले इस विकास-वाद के बारे मे भी उनके उस ग्रन्थ में थोड़ी-बहुत कल्पना मिलती ही है। इस ग्रीक ग्रन्थकार के ग्रन्थ मे विकासवाद के कौन-कौन प्रमेय कहाँ-कहाँ वर्णित है, इसका विस्तृत वर्णन करना तो यहाँ ज़रा मुश्किल है, संक्षेप मे सिर्फ यही कहना पर्याप्त होगा कि "जीव की सृष्टि जड़ से हुई, वनस्पतियो की उत्पत्ति प्राणियों से पहले हुई। प्राणियों मे भी पहले नीचे दर्जे के प्राणी हुए, फिर

ऊँचे दर्जे के, और उन सबके अन्त मे इस भूतल पर मनुष्यों का अवतरण हुआ"* इत्यादि विकासवाद से मिलती-जुलती जो कल्पनायें कितने ही लोगो के ग्रन्थों मे गृहीत हैं वे सब उनके उस ग्रन्थ ही से ली गई हैं।

परन्तु इससे भी अधिक नई और आश्चर्यपूर्ण बात तो यह है कि हमारे प्राचीन धर्मग्रन्थो मे भी विकासवाद के समर्थक विचार मिलते बताये जाते हैं, जैसा कि लोकमान्य तिलक कृत 'गीता-रहस्य' से गृहीत निम्न उद्धरण से प्रकट होगा—"विश्वोत्पत्ति के सम्बन्ध में विवेचन होकर सांख्यशास्त्र मे जो सिद्धान्त निर्धारित किये गये है उनमे से अनेक आधुनिक विकासवाद के सिद्धान्तो से मेल खाते हैं। सांख्य के मतानुसार आरम्भ में सत्त्व, रज, तम, इन तीन गुणो से युक्त कोई अव्यक्त एवं विशुद्ध मूलतत्त्व इस विश्व में अखण्ड रूप से प्रसृत था, जिसे वह 'प्रकृति' कहता है। बाद मे सत्त्व, रज, तम की साम्यावस्था में पड़ी हुई उस प्रकृति की तह उसी प्रकार धीरे-धीरे खुलने लगी, जैसे कि एकबार किसी चीज की तह खुल जाने पर वह धीरे-धीरे खुलती ही जाती है। अर्थात जितनी भी व्यक्त सृष्टि है वह सब क्रम-पूर्वक निर्माण होती हैं। इस प्रकार सांख्य के इस कथन

* 'पायनीयर्स ऑफ़ इवॉल्यूशन' (Pioneers of Evolution—Edward Clodd) से।

मे और (आधुनिक) विकासवाद मे वस्तुतः कोई विशेष अन्तर नहीं रह जाता। क्योकि, विकासवाद के अनुसार भी, तो इस विश्व में आरम्भ मे कुछ-न-कुछ विशुद्ध-से तप्त पदार्थ ही चारो ओर भरे पड़े थे, जिनकी गति और उष्णता मे क्रम-क्रम मे कमी होते हुए बाद मे उनमे से सर्वग्रहो तथा हमारी इस पृथ्वी की भी उत्पत्ति हुई। इसी प्रकार फिर जैसे-जैसे यह पृथ्वी ठण्डी होने लगी, वैसे-वैसे, इसपर वायु, जल आदि की उत्पत्ति हुई, और, उसके बाद, क्रमपूर्वक वनस्पति एवं प्राणियो की बहुतायत होती गई।" इसमे ध्यान रखने की जो बात है वह सिर्फ यही कि आधुनिक विकासवादियो और प्राचीन सांख्य की कल्पनाओं मे समता तो है; परन्तु आधुनिक कल्पना का मूल जहाँ प्रयोग-सिद्ध है, अर्थात् प्रत्यक्ष प्रमाणो पर उसकी रचना हुई है, तहाँ प्राचीन कल्पना केवल अनुमानभूत है।

अब अगर यह कहा जाय कि इन दोनों उपपत्तियों सम्बन्धी यह अस्पष्ट कल्पना अत्यन्त प्राचीनकाल से ही मिलती है तो भी यह तो मानना ही पड़ेगा कि बहुत समय, अर्थात् उन्नीसवीं शताब्दी, तक तो इनमें से पहली उपपत्ति ही सर्वमान्य थी, दूसरी उपपत्ति तो पूरे तौर पर अभी हाल मे, अर्थात् उन्नीसवी शताब्दी के उत्तरार्द्ध में ही, सामने आई है और बाद मे अनेक वर्षों तक प्रथम विचार-शैली से मुक़ाबला करते रहकर इसने उसकी जगह

प्राप्त की है। अब प्रश्न यह होता है कि जीव-सृष्टि की उत्पत्ति के सम्बन्ध मे पहली ही कल्पना शतकानुशतक क्यों प्रचलित रही? बहुत सम्भवतः इस सम्बन्ध मे 'बाइबल' मे लिखित और इसलिए ईसाई-धर्म के लिए आधारभूत वर्णन अथवा वचनो से इसका मेल खाना ही इसका कारण है। 'बाइबल' में लिखा है कि "सृष्टि के आरम्भ मे प्रत्येक प्राणी को ईश्वर ने स्वतंत्र रूप मे रचा था," और विकासवादियो का कथन इससे बिलकुल उलटा है। इसीलिए पोप और उनके अत्याचारी अनुयायियों के सामने बहुत समय तक विकासवादी आगे न आ सके, तो इसमे आश्चर्य क्या? परन्तु इसके बाद वैज्ञानिक सत्य के जोर पर धीरे-धीरे इस स्थिति का परिवर्तन होना शुरू हो गया। बहुतों को पहली उपपत्ति के विषय में शङ्का उत्पन्न हुई। उन्हें भासित होने लगा कि, जो कुछ हमे प्रत्यक्ष दिखाई पड़ता है, यह उपपत्ति तो उससे सर्वथा विपरीत है। तब उन्होने दूसरी उपपत्ति पर ध्यान दिया और विकासवाद की शोध जारी हो गई। जिन्होंने इस ओर क़दम बढ़ाया उनमे बफन, लेमार्क, स्पेन्सर और डार्विन मुख्य हैं। यह कहा जाय तो भी कुछ हर्ज नही कि थोड़े-बहुत परिमाण मे यही सब विकासवाद के आधार-स्तम्भ या जनक माने जाते हैं। इनमें अनेक शास्त्रीय (वैज्ञानिक) शोधों के द्वारा विकासवाद को प्रमाणित करने वाला लेमार्क है। विकास

की मूलभूत कल्पना—अर्थात् एक जाति या किस्म से धीरे-धीरे (क्रमपूर्वक) अनेक जातियाँ कैसे उत्पन्न हो सकती हैं, यह बात—उसने साबित कर दी। उसका कहना है कि किसी भी प्राणी को लें तो हम देखेंगे कि उसकी सभी सन्तानें कभी भी बिलकुल एकसी या हूबहू नहीं होती। उदाहरणार्थ, किसी बिल्ली के सब बच्चे हूबहू वैसे-के-वैसे नहीं होते—प्रत्येक में थोड़ा-बहुत अन्तर रहता ही है। इसके अतिरिक्त, प्रत्येक व्यक्ति की वृद्धि उसके व्यवसाय पर अवलम्बित रहती है। जिन्हें ज़्यादा चलना पड़ता है उनके पैर सख्त और मजबूत होते हैं। ठोक-पीट करते-करते लुहार के हाथ कितने सख्त हो जाते हैं, यह हम सब जानते हैं। मतलब यह कि एक ही माता-पिता के भिन्न-भिन्न बालकों में भी पैदायश के समय थोड़ा-बहुत अन्तर तो रहता ही है; पश्चात्, व्यवसाय-भेद से, उसमें और वृद्धि ही होती जाती है। फिर यह भी सभी जानते हैं कि एक ही माता-पिता के सब बालक यदि बिलकुल एकसे न हों तो भी थोड़े-बहुत परिमाण में तो उनमें अपने माता-पिता के गुण-अवगुण रहते ही हैं। ऊपर जिन विविध व्यक्तियों का उल्लेख किया गया है उनकी सन्तति भी इसी प्रकार उनके समान, अर्थात् उस-उस गुण-अवगुण से युक्त, होगी ही। और फिर जब वंशानुवंश यही क्रम जारी रहा तो, जैसा कि ऊपर बताया गया है व्यक्ति-व्यक्ति का यह अन्तर क्रमपूर्वक

अधिकाधिक बढ़ते हुए अन्त में इतना विशाल हो जायगा, कि हम यह कल्पना भी न कर सकेंगे कि इन सब विविध व्यक्तियों की उत्पत्ति किसी एक ही पूर्वज से हुई होगी। इसी लिए; दूसरे शब्दों में कहें तो यह कहना होगा कि, एक दूसरे से बिलकुल भिन्न विविध जातियाँ मूल मे किसी एक ही जाति से उत्पन्न हुई हैं।

स्पेन्सर को तो यहाँ तक प्रतीत होने लगा था कि सृष्टि की उत्पत्ति-सम्बन्धी जो पहली उपपत्ति है शास्त्रीय भाषा मे तो उसे उपपत्ति ही नहीं कह सकते—यह तो एक अज्ञानमूलक शब्दाडम्बर-मात्र है। उसका कहना है कि इस पृथ्वीतल पर न्यूनातिन्यून तीन लाख बीस हजार (३,२०,०००) प्रकार के प्राणी और बीस लाख (२०,००,०००) प्रकार के वनस्पति मिलते हैं; यदि पहली उपपत्ति के अनुसार यह माना जाय कि इनमें से प्रत्येक प्रकार का निर्माण ईश्वर ने स्वतंत्र रूप से ही किया है, तो हमें यह मानना पड़ेगा कि ईश्वर को सृष्टि-रचना करने में तेईस लाख बार निर्माण-कार्य करना पड़ा होगा—और, इससे सिवा गड़बड़ (गलतफहमी) के और कुछ न होगा। स्पेन्सर के मतानुसार यह कल्पना अत्यन्त क्षुद्र एवं मूर्खतापूर्ण है और विकासवाद से इस प्रश्न का जो उत्तर मिलता है वही इसकी अपेक्षा अधिक सम्पूर्ण और समाधानकारक है—अर्थात्, नैसर्गिक रूप

में इन सब जातियों या प्रकारों की वृद्धि मूल की कुछ जातियों से ही क्रमपूर्वक हुई है। विकास की कल्पना कितनी व्यापक है और ग्रहमण्डल, समाज, मानसशास्त्र आदि भिन्न भिन्न स्थानों—अर्थात्, समष्टिरूप से, समस्त विश्व-पर वह कैसे लागू होती है, इस बात को स्पेन्सर ने ही पहले-पहल विशद रूप से प्रमाणित किया।

स्पेन्सर ने इस प्रकार विकासवाद को समस्त विश्व पर लागू करके बता तो दिया, परन्तु इतने पर भी लोगों का समाधान न हुआ। क्योंकि स्पेन्सर प्रधानतः तत्त्वज्ञानी ही था, विज्ञानवेत्ता या शास्त्रज्ञ नहीं; अतएव, सर्वसाधारण का समाधान कर देने-योग्य, प्रबल एवं प्रयोगसिद्ध प्रत्यक्ष प्रमाण देना उसके लिए सम्भव न था। फिर कुछ लोगों को विकासवाद के प्रति थोड़ी-बहुत सहानुभूति भी हुई तो जबतक वे यह न जान लेते कि विकास क्यों और कैसे होता है तथा उसके युक्तिपूर्ण कारण क्या हैं, वे खुले-आम विकासवाद के सिद्धान्त का मानने के लिए तैयार नहीं हो सकते थे—और, स्पेन्सर इन रहस्यों को खोलने में बिलकुल असमर्थ रहा। यह रहस्य खोलकर सर्व-साधारण के मनों में विकासवाद के सिद्धान्त को पैठाने का श्रेय तो अन्त में चार्ल्स डार्विन नामक सुप्रसिद्ध शास्त्रज्ञ को ही मिला; और, इसके कारण, उसकी इतनी ख्याति हुई कि विकासवादियों में ही

नहीं बल्कि गत-शताब्दी मे उत्पन्न सभी शास्त्रज्ञों मे आज उसका नाम चिरस्थायी हो गया है*—यहाँ तक कि कुछ लोग तो उसे ही विकासवाद का जनक मानते हैं। परन्तु हम तो ऊपर देखही चुके है कि डार्विन से पहले ही बफन, लेमार्क, स्पेन्सर आदि महानुभावो ने भली-भाँति विकासवाद का प्रतिपादन कर दिया था। यह जरूर है कि विद्वद्-समुदाय और खासकर शिक्षितवर्ग मे इस विषय-सम्बन्धी जितनी खलबली सन् १८५९ ई० मे इस विषय पर प्रकाशित डार्विन की 'जातियों का मूल' (Origin of species) नामक पुस्तक ने मचाई, उतनी गत-शताब्दी में प्रकाशित और कोई पुस्तक न मचा सकी। पर इसका कारण था। वह यह कि डार्विन ने अनेक वर्षों के संतत परिश्रमपूर्ण प्राणि-शास्त्र एवं वनस्पतिशास्त्र के अध्ययन से जो भरपूर प्रमाण संग्रह किये थे इस पुस्तक मे ऐसी सरल और तर्कसम्मत रीति से उन-पर से अनुमान निकाले गये कि कोई बालक भी उन्हें भली-

* डीन इंगू ने हाल में लिखे हुए अपने एक लेख में समस्त जगत् में आज-पर्यन्त अवतरित होनेवाले महापुरुषों की तालिका दी है। इसमें डार्विन और पाश्चूर को उसने शास्त्रज्ञों (विज्ञानवेत्ताओं) में सम्मिलित किया है। यहाँ ध्यान देने-योग्य जो बात है वह यह कि डीन इंगू एक बड़ा धर्माचार्य था, मगर उसे भी डार्विन का नाम महापुरुषों की सूची में देना ही पड़ा।

भाँति समझ सकता है; साथ ही उसमें खास तौर पर इस बात की मीमांसा भी थी कि विकास कब और कैसे होता है। लेमार्क ने इससे पहले इस सम्बन्ध में जो मीमांसा की, वह हम पहले देख ही चुके हैं। परन्तु उस समय विकासवाद के सिद्धान्त का प्रसार नहीं हो सका था, क्योंकि अनेकों की दृष्टि में वह मीमांसा अपूर्ण थी। अस्तु।

डार्विन को बाल्यावस्था से ही प्राणिशास्त्र एवं वनस्पतिशास्त्र के अध्ययन की धुन सवार हो गई थी; तरह-तरह के फल-फूल, कीड़े-मकोड़े आदि विविध पदार्थ संग्रह करने का शौक़ उसे बचपन से ही बड़ा ज़बर्दस्त था। अपनी आयु के बाईसवें वर्ष में इसके लिए उसे एक स्वर्ण-संयोग भी प्राप्त हो गया। दक्षिण-अमेरिका की ओर जाने वाले एक जहाज में उसे सृष्टिशास्त्रज्ञ का कार्य करना पड़ा। इस सिलसिले में वह पाँच वर्ष तक लगातार प्रवास-ही-प्रवास करता रहा। इस प्रवास में उसे जो-जो अनुभव हुए, तथा जो-जो सामग्री उसने संग्रह की, उन्हीं सबके आधार पर प्रवास के बाद उसने अपने उक्त ग्रंथ का निर्माण किया। सृष्टि की उत्पत्ति-विषयक प्रचलित पहली उपपत्ति के सम्बन्ध में डार्विन को पहले-पहल जो शङ्का उत्पन्न हुई, वह इसी प्रवास में; और इन पाँच वर्षों के सूक्ष्म-निरीक्षण से उसे यह दृढ़-विश्वास हो गया कि इस जीव-सृष्टि मे जो विविधता और

उस विविधता में ही जो एक प्रकार की व्यवस्थितता दृष्टिगोचर होती है उस सबका कारण दैवी या ईश्वरीय इच्छा न होकर उसका (विविधता का) मूल नैसर्गिक एवं नियमबद्ध भित्ति पर ही निर्भर होना चाहिए।* क्योंकि, अपने प्रवास मे उसे कितने ही ऐसे पक्षी मिले कि जो साधारण दृष्टि से देखने में एक-दूसरे से थोड़े-बहुत भिन्न मालूम पड़ते थे; परन्तु वस्तुतः जहाँ उनमे कुछ एक-दूसरे से बिलकुल भिन्न थे वहाँ कुछ मिलते-जुलते भी थे; और तब जिस प्रकार कि क़वायद के समय सिपाहियों की ऊँचाई से उनका क्रम लगाया जाता है वैसे ही उसने भी पारस्परिक अन्तर से ही उनका क्रम लगाया। अर्थात्, जिस प्रकार क़वायद मे पास-पास के सिपाहियों की ऊँचाई प्रायः बराबर ही मालूम पड़ा करती है किन्तु अलग-अलग छाँटकर नापने पर उनमें बहुत-कुछ फ़र्क निकलता है वैसे ही, इस अनुक्रम में पास-पास की वनस्पतियाँ बहुत-कुछ समान दीखने पर भी जाँच करने पर उसे उनमें बहुत-कुछ फ़र्क मिला। इस उदाहरण मे यदि हम

* डार्विन से पहले लायल (Lyel) ने अपने 'भूगर्भशास्त्र के सिद्धान्त' (Principles of Geology) नामक ग्रंथ में पृथ्वी के पृष्ठ-भाग की उत्पत्ति-सम्बन्धी जो विचार शैली प्रयुक्त की थी, उसका भी डार्विन के मन पर बहुत-कुछ प्रभाव पड़ा था—यह यहाँ प्रकट कर देना आवश्यक है।

कोई दो प्रकार की वनस्पतियों में से केवल एक-एक वनस्पति को लेकर केवल उसपर ही विचार करें तो, उनमें परस्पर बहुत अन्तर होने के कारण, हमारे मन में यह कल्पना होना सम्भव है कि, इनकी उत्पत्ति स्वतंत्र रूप से हुई होगी। परन्तु इसके साथ ही उन दोनों वनस्पतियों के बीच स्थित अन्य अनेक वनस्पतियां पर भी यदि हम ध्यान दें तो हमारे मन में सहज ही यह शंका उत्पन्न हो जायगी कि ये सब वनस्पति बीच ही में एकाएक उत्पन्न न होकर इनमें थोड़ा-बहुत पारस्परिक सम्बन्ध एवं क्रम अवश्य रहा होगा और उसी क्रम के अनुसार एक-दूसरे से ही इन सबकी उत्पत्ति हुई होगी। अपने पाँच वर्ष के प्रवास में डार्विन ने जो अनेक प्राणी एवं वनस्पति देखे, उनमें ऐसे अनेक उदाहरण उसे मिले; और, उन्हींपर से, विकासवाद पर उसका विश्वास होने लगा था।

इन सब बातों से जब विकासवाद पर डार्विन का विश्वास जम गया तब उसे यह जिज्ञासा हुई कि सृष्टि में विकास कब और कैसे होता है—अर्थात्, किसी प्राणी या वनस्पति में धीरे-धीरे अन्तर पड़ते हुए कालान्तर में उनसे भिन्न एक दूसरे प्रकार के प्राणी या वनस्पति की उत्पत्ति कैसे होती है ? अनेक वर्षों तक वह इसपर विचार करता रहा।

अन्त में एक दिन अचानक ही उसे इस रहस्य का पता चल

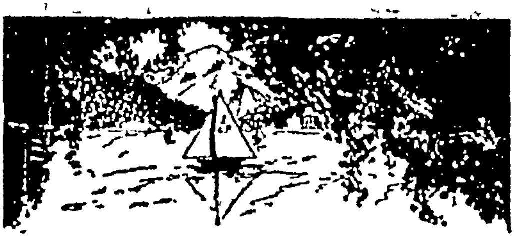
गया। एक दिन यूंही लेटे-लेटे वह मेथल नामक एक लेखक की लिखी हुई 'जन-वृद्धि की मीमांसा' नाम की पुस्तक पढ़ रहा था, जिसमें यह प्रतिपादन किया हुआ है कि मनुष्यों में जन-वृद्धि भूमिति के नियमानुसार होती है और जीवन के साधन-रूप अन्नादि समस्त (खाद्य) पदार्थों में केवल अङ्कगणित के नियमानुसार दूनी-गिनी। अर्थात्, मनुष्यो की प्रत्येक पीढ़ी में जहाँ १ : २ : ४ : ८ के अनुपात से जन-वृद्धि होती है वहाँ जीवन के साधन-रूप अन्नादि पदार्थों में केवल १ : २ : ३ . ४ के अनुपात से वृद्धि होती है। इसीपर डार्विन की कल्पना-बुद्धि जाग्रत हुई। तब अन्य प्राणी एवं वनस्पतियों पर भी उसने इस सिद्धान्त को लागू करके देखा। इसपर से सहजही उसने यह निष्कर्ष निकाला कि प्राणियो की संख्या-वृद्धि की अपेक्षा उनके जीवन के साधन-रूप पदार्थों की वृद्धि जब कम होती है तो यह निश्चय है कि आगे चलकर (भविष्य मे) एक खास समय ऐसा अवश्य आयगा, जब कि लोगों को अन्न की कमी महसूस होने लगेगी, और फिर, ज्यों-ज्यों समय बीतता जायगा त्यों-त्यो, अन्न का वह अभाव और भी अधिकाधिक महसूस होने लगेगा। फिर जब समस्त प्राणियों की उदर-पूर्त्ति के योग्य अन्न न रहेगा तब, अपनी-अपनी उदर-पूर्त्ति-योग्य अन्न की प्राप्ति के लिए, उनमें आपस की चढ़ा-ऊपरी मच जायगी; फल-स्वरूप जिन्हें भरपूर अन्न मिल जायगा वे तो

शेष (जीवित) बच रहेंगे, बाक़ी के सब लोग भूखों मर मिटेंगे। अब विचार यह करना चाहिए कि किसी भी जाति के अनेक व्यक्तियों में, ऐसी चढ़ा-ऊपरी होने पर, कौन से व्यक्ति शेष रहेंगे—अर्थात्, भरपूर अन्न उनमें से किन्हें प्राप्त हो सकेगा? अस्तु, यह तो हमें मालूम ही है कि किसी एक ही जाति के अनेक व्यक्ति हूबहू एकसे ही कभी नहीं होते। व्यक्ति-व्यक्ति में, एक-दूसरे से, थोड़ा-बहुत फ़र्क़ तो होता ही है। कोई सशक्त तो कोई अशक्त, कोई चपल तो कोई सुस्त, कोई धूर्त्त तो कोई सरल, इस प्रकार के भेद अवश्यम्भावी हैं। ऐसी हालत में, अन्न का अभाव होने पर, अधिक अन्न तो उन्हीं व्यक्तियों को मिलेगा कि जो अपेक्षाकृत अधिक सशक्त, धूर्त्त अथवा चपल होंगे; और इस प्रकार इस चढ़ा ऊपरी या संघर्ष में केवल वही व्यक्ति टिक सकेंगे, बाक़ी तो सब उनके पैरों-तले रूँदकर समाप्त ही हो जायँगे। इस प्रकार इस चढ़ा-ऊपरी या संघर्ष में समस्त व्यक्तियों में से केवल ऊपर कहे हुए विशिष्ट गुण-सम्पन्न कुछ व्यक्ति ही विजयी होकर ज़िन्दा बचेंगे, बाकी सब मर मिटेंगे। इसके बाद उनके आगे की पीढ़ियों में, आनुवंशिकत्व के अनुसार, ये विशिष्ट गुण फिर से विशेष परिमाण में प्रकट होंगे; और, अनेक पीढ़ियों तक यही क्रम जारी रहने पर, अन्त में जो प्रजा उत्पन्न होगी वह पहली प्रजा से बिलकुल भिन्न हो सकेगी।

मतलब यह कि इस उदाहरण में यदि उन प्राणियो की सौ या हज़ार पीढ़ियों बाद होने वाली प्रजा से प्रारम्भिक पीढ़ी की प्रजा की तुलना की जाय तो मालूम होगा कि वर्तमान प्रजा की अपेक्षा भावी प्रजा कहीं अधिक सशक्त, चपल एवं धूर्त्त होगी; और इस प्रकार जो परिवर्त्तन होगा, अर्थात् ऐसा जो विकास होगा, वह केवल एक विशिष्ट नैसर्गिक परिस्थिति में और नैसर्गिक नियम के अनुसार ही होगा। डार्विन की यह विचार-शैली अत्यन्त सीधी-सादी, सरल और तर्कसम्मत है। इस प्रकार डार्विन के समय तक जिस रहस्य का उद्घाटन नही हुआ था, उसे डार्विन ने खोलकर रख दिया; और इसमें विकास का कारण उसने जीवन-रक्षा के लिए होने वाली चढ़ा-ऊपरी (संघर्ष) और उसमें विजय पाने-योग्य अत्यन्त-योग्य प्राणियो के शेष (जीवित) रहने की शक्यता को बतलाया।

ऊपर डार्विन की उपपत्ति का कुछ ही दिग्दर्शन कराया गया है; क्योंकि आगे चलकर इसी विषय पर हमें विस्तार के साथ विचार करना है। तथापि, यह तो कहना ही होगा, सर्व-साधारण को उसकी उपपत्ति इतनी सीधी-सादी और सम्पूर्ण प्रतीत हुई है कि इसके द्वारा विकासवाद का शीघ्रता के साथ प्रसार होकर अन्त मे सर्वत्र उसीका बोलबाला हो गया है। यह ठीक है कि सन् १८५९ ई० में जब डार्विन ने अपने इस 'जातियो का मूल'

ग्रन्थ के द्वारा पहले-पहल इस उपपत्ति की घोषणा की, तो—उस समय लोगों के प्राचीन मताभिमानी होने के कारण—अनेकों ने खूब ज़ोरों से डार्विन का विरोध किया था। परन्तु डार्विन की विचार-शैली तो इतनी अचूक और उसकी मीमांसा ऐसी ज़बर्दस्त नींव पर स्थापित थी कि चाहे-जैसे आघात होने पर भी उनका फिसलना बहुतांश में असम्भव ही था। अलावा इसके डार्विन स्वयं तो यद्यपि बहुत वाद-विवाद-पटु न था, मगर उसकी मदद के लिए इंग्लैण्ड में हक्सले और जर्मनी में हेकेल सरीखे अतिशय विद्वान्, तार्किक और वाद-विवाद में सिद्ध-हस्त शिष्य उसे मिल गये थे। उन्होंने अपने लेखों और व्याख्यानों के द्वारा विकासवाद का ऐसा ज़बर्दस्त प्रसार किया कि उसके फल-स्वरूप आज-पर्यन्त इस सिद्धान्त के विरुद्ध एक अक्षर भी नहीं सुनाई पड़ता। यही नहीं बल्कि अर्वाचीन शास्त्रीय एवं तात्त्विक वाङ्मय में तो यह सिद्धान्त इतना बद्धमूल हो गया है कि अब तो इसे बहुत कुछ स्वयं-सिद्ध ही माना जाने लगा है।



२

विकास के प्रमाण

पिछले अध्याय में ऐतिहासिक दृष्टि से विकासवाद के सम्बन्ध में विचार करके यह तो हम जान ही चुके हैं कि आजकल के (अर्वाचीन) सभी शास्त्रोंमे यह सिद्धान्त ऐसा दृढ़मूल हो गया है कि कोई समझदार आदमी तो अब इसके बारे मे शंका करता ही नहीं। क्योंकि प्राणिशास्त्र और वनस्पतिशास्त्र मे जो अनेक बातें दृष्टिगोचर होती हैं, इस सिद्धान्त के द्वारा न केवल उन सबकी शृङ्खला ही बड़ी उत्तमता के साथ लग जाती है बल्कि इन शास्त्रो की अनेक महत्वपूर्ण अर्वाचीन शोधो का दारमदार भी इसीपर है। तथापि किसी बात के सर्व-

सम्मत होने ही के कारण हम उसपर विश्वास क्यों करलें, जबतक कि उसके कारणों की छानबीन न करली जाय? अतः इस अध्याय मे संक्षेप में उन कारणो का ही कुछ वर्णन किया जाता है।

यह तो पहले अध्याय मे हम देख ही चुके हैं कि जीव-सृष्टि मे होने वाली प्राणियों एवं वनस्पतियो की भिन्न-भिन्न जातियों (क़िस्मो) की उत्पत्ति के बारे मे दो तरह की उपपत्तियाँ दी जाती हैं। एक तो यह कि प्रत्येक जाति को ईश्वर ने पृथक्-पृथक् अर्थात् स्वतंत्र रूप से निर्माण किया है—अर्थात् अद्भुत या दैवी; और दूसरी यह कि इन सब जातियो की उत्पत्ति किन्हीं स्वाभाविक अथवा नैसर्गिक कारणों से ही हुई है। इनमे दूसरी मीमांसा अर्वाचीन है और पहली प्राचीन। शास्त्रीय शोधों के इतिहास को हम देखें तो साधारणतः उनमें भी हमे यही बात दिखाई पड़ेगी। उदाहरणार्थ, पहले एक समय ऐसा था कि अगर कोई आदमी बीमार पड़ता तो उसे अच्छा करने के लिए मंत्र-तंत्रादि का प्रयोग किया जाता था। अर्थात् उस समय के लोगो की यह धारणा थी कि जो भी रोग होते हैं वे सब किसी न किसी दैवी अथवा अमानुषीय कारण से ही होते हैं, मनुष्य का उसमें कोई बस नहीं। परन्तु बाद मे जैसे-जैसे समय बीतता गया उन्हे इस बात की असत्यता प्रतीत होने लगी और तब मंत्रो के बजाय

औषधियों का प्रयोग शुरू हुआ। अर्थात् कालान्तर में लोगों को यह विश्वास हो गया कि दैवी नहीं बल्कि किन्हीं स्वाभाविक या नैसर्गिक कारणों ही से रोगों की उत्पत्ति होती है और तब उनका निदान भी नैसर्गिक उपायों से ही किया जाने लगा। हमारे सामने जो प्रश्न है, उसपर भी यही बात लागू होती है; और उसपर से यह अनुमान निकलना स्वाभाविक ही है कि विभिन्न जातियों की उत्पत्ति का कारण भी दैवी नहीं नैसर्गिक ही होना चाहिए।

सभी चीजें थोड़े बहुत परिमाण में बराबर बदलती रहती हैं, जैसा इस समस्त सृष्टि पर सूक्ष्म दृष्टिपात करने पर दिखलाई भी पड़ता है। समाज की रचना, तारागण, मनुष्य की कल्पना. अथवा अन्य किसी भी वस्तु को लीजिए, उन सबके परमाणु बराबर बदलते ही रहते हैं। हमारी पृथ्वी भी आरम्भ में तो तप्त एवं वायुमय—अर्थात् तेज या अग्नि और वायु से भरी हुई—ही थी, क्रम-क्रम से स्थिति में परिवर्त्तन होते हुए ही तो, कालान्तर में, उसे पहले द्रव-रूप और उसके बाद घन-रूप प्राप्त हुआ। उस समय तो इसकी ऊष्णता इतनी अधिक थी कि किसी प्राणी अथवा वनस्पति का इसपर नाम भी न था। तब, इसी नियम के अनुसार, यदि हम यह अनुमान लगावें कि जिन अनेक प्राणियों एवं वनस्पतियों को आज हम इस भूमण्डल पर देखते हैं वे सब

भी किसी प्रकार एकाएक यहाँ नहीं आ पहुँचे बल्कि क्रम क्रम से बदलते हुए ही इस स्थिति को प्राप्त हुए होंगे, तो यह निश्चय ही सम्भव प्रतीत होगा।

जीव-सृष्टि में भिन्न-भिन्न प्रकार के असंख्य प्राणी एवं वनस्पति हैं; जिनका प्राणिशास्त्र एवं वनस्पतिशास्त्र के आचार्यों ने वर्गीकरण भी किया है। उस वर्गीकरण को यदि हम बतलाना चाहें तो हमें वैसा ही करना होगा, जैसे कि इतिहास में आम तौरपर किसी परिवार की वंशावली दी जाती है। अर्थात् प्राणियों के भिन्न-भिन्न वर्गों-उपवर्गों और जातियों-उपजातियों का सब मिलाकर एक बड़ा वृक्ष ही बन जायगा। फिर इस सम्बन्ध में यह भी ध्यान रखना चाहिए कि जिन प्राणियों अथवा वनस्पतियों का वर्गीकरण किया जायगा, आकाश के तारागणों की नाईं, उन्हें गिनना भी कुछ सहज नहीं है। अतएव इस झंझट से बचने की दृष्टि से हम उसे यहाँ नहीं दे रहे हैं, वैसे उसकी रचना पूर्णतः नैसर्गिक तौरपर ही हुई है। किसी भी वर्ग के भिन्न-भिन्न प्राणियों को लें तो उनके शरीरों की रचना में थोड़ा-बहुत सादृश्य तो मिलेहीगा। इसी प्रकार एक वर्ग से दूसरे वर्ग में जाने वाले प्राणियों के बीच अपेक्षाकृत और भी अधिक समता दृष्टिगोचर होगी। मतलब यह कि वर्गीकरण के समस्त वृक्ष पर सूक्ष्म दृष्टिपात किया जाय तो सहज ही कल्पना होगी कि ये सब प्राणी

मानों एक बड़ा भारी वंश-विस्तार ही है, और जिस प्रकार किसी वंशावली के मनुष्यों में नजदीकी या दूर-पार के कुछ-न-कुछ नाते-रिश्ते होते ही हैं वैसे ही इन विभिन्न प्राणियों में भी परस्पर कुछ-नकुछ सम्बन्ध अवश्य होगा; यही नहीं बल्कि जैसे-जैसे वर्गीकरण पर ध्यान दिया जायगा वैसे-वैसे वे नाते भी अधिकाधिक निकटवर्त्ती प्रतीत होते जायँगे। इसपर से सहज ही यह कल्पना होती है कि अवश्य ही ये सब प्राणी मूल में कुछ थोड़े से पूर्वजो के ही वशज हैं; यदि कुछ अन्तर है तो यही कि वे पूर्वज लाखो वर्ष पहले, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन काल में, हुए होंगे। (चित्र नं० २)

इस प्रकार विकासवाद का मूल यही कल्पना है कि परिस्थिति में जैसे-जैसे परिवर्त्तन होता जाता है उसीके अनुसार प्राणियो की शरीर-रचना भी बदलती जाती है, जिससे कि वे उस परिवर्त्तित परिस्थिति का मुक़ाबला करने मे असमर्थ न रहें, और फिर आनुवंशिक-संस्कारानुसार भावी पीढ़ियों में क्रमशः वृद्धि होते हुए अन्त मे उन प्राणियो के सारे रंग-रूप ही बदले हुए मालूम पड़ने लगते हैं। अब देखना यह है कि परिस्थिति के अनुसार शरीर-रचना में परिवर्त्तन होने की बात का समर्थन करने वाले कुछ प्रमाण भी मिलते हैं या नहीं।

विचार करने पर मालूम पड़ेगा कि ऐसे प्रमाणों की कुछ

की कमी नहीं। प्राणिशास्त्र और वनस्पतिशास्त्र तो उनसे भरे पड़े हैं। अतः उनमे से मुख्य-मुख्य कुछ उदाहरण यहाँ दिये जाते है। बाहर से एक-दूसरे से बिलकुल भिन्न दीखने वाले कुछ प्राणियो को लीजिए। उनके शरीरो की अन्तर्रचना देखें तो हमे उनमें विलक्षण समता मिलेगी—और वह भी इतनी प्रत्यक्ष कि हमे आश्चर्य इसी बात पर होगा कि अन्दर एक-दूसरे के समान (एकसे) होते हुए भी इनके बाह्य रूप मे इतनी भिन्नता कैसे हो गई! परन्तु विकासवाद के अनुसार विचार करें तो बड़ी सुन्दरता के साथ हमे इसका कारण मालूम हो जायगा, जो कि नीचे दिया जाता है।

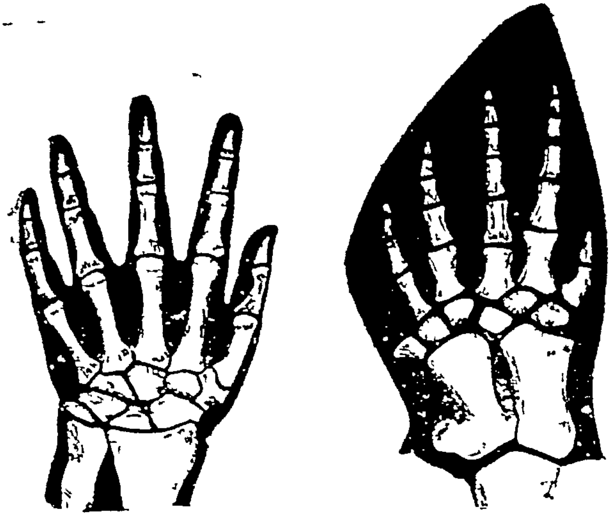
उदाहरण के लिए मनुष्य, बन्दर, पक्षी, चिमगादड़, ह्वेलमछली और मीलमछली, इन छः प्राणियों को लीजिए। बाहर से देखने मे इनमें एक-दूसरे से इतनी भिन्नता है कि इनमे से किसी एक को देखकर उसपर से दूसरे की तो कल्पना तक न होगी, क्योंकि संचय (हलचल), आहार-विहार आदि इनकी सभी बाते एक-दूसरे सें सर्वथा भिन्न है। मगर दिल्लगी यह है कि उनके किसी अवयव को लेकर उसकी अन्तर्रचना पर यदि हम सूक्ष्म दृष्टिपात करे तो उसमे तो इतनी समानता है कि हमे एकाएक यह सदेह होने लगेगा कि किसी एक ही प्राणी के अवयवो को तो कहीं हम बार-बार नही देख रहे हैं। समझने के लिए इन सब

प्राणियों के हाथ और पाँव लेकर सबसे पहले मनुष्य की अन्त-र्रचना पर ही विचार कीजिए।

मनुष्य के पूरे हाथ अर्थात् कन्धे से लेकर अगुलियो तक की अन्तर्रचना कैसी होती है, यह चित्र न० ३ में प्रदर्शित है। उसमें कन्धे से लेकर कुहनी तक तो एक लम्बी हड्डी है (चित्र मे यह नहीं बतलाई गई है), दो परस्पर जुड़ी हुई हड्डियाँ कुहनी से कलाई तक हैं, तदुपरान्त दो अवलियाँ (पंक्तियाँ) छोटी-छोटी हड्डियों की हैं, उनके बाद पाँच हड्डियाँ हथेली की तथा सबके आखीर मे पाँच अंगुलियाँ हैं, जिनमे हरएक मे एक के बाद एक इस प्रकार दो-दो या तीन-तीन हड्डियाँ होती हैं। यही हाल पाँव की अन्तर्रचना का है, यदि कुछ फर्क है तो वह सिर्फ हड्डियो की छुटाई-बड़ाई का। मनुष्य ही क्यो, बन्दर के हाथ-पाँव की अन्त-र्रचना को लें तो वह भी ऐसी ही है; यदि कुछ फर्क है तो यहाँ भी वही मनुष्य व बन्दर के हाथ-पैरों की उपर्युक्त हड्डियो की छुटाई-बड़ाई का ही है।

अब जरा सीलमछली और 'व्हेल' या देवमछली को देखिए (चित्र नं० ३ व ४)। मनुष्य और बन्दर मे इतनी तो समा-नता है कि वे दोनो ही जमीन पर रहने वाले हैं, पर मनुष्य और देवमछली व सीलमछली के बीच तो यह समानता भी नहीं है। देवमछली जहाँ पूर्णत. जलचर है—अर्थात् सदैव पानी में रहती

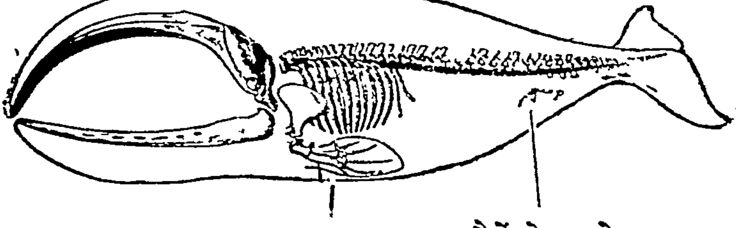
चित्र नं० ३



मनुष्य का हाथ

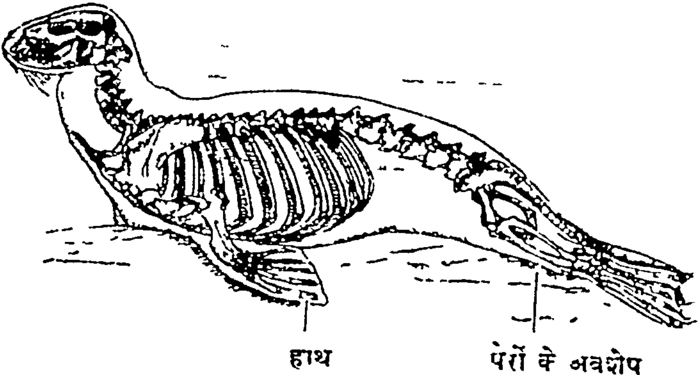
देवमछली का पर

चित्र नं० ४



देवमछली

चित्र नं० ५



सीलमछली

चित्र नं० ६

टेरोडॅकटिल
(एक प्राचीन पक्षी)

चिमगादड़

अर्वाचीन पक्षी

है, तहाँ सीलमछली है अर्द्ध-जलचर अर्थात् कभी पानी में रहती है तो कभी पृथ्वी पर भी। फिर यह तो सब जानते ही हैं कि ज़मीन पर चलना और पानी मे तैरना दो सर्वथा भिन्न क्रियायें होने के कारण किसी एक ही तरह की शरीर-रचना दोनो जगह एकसी उपयोगी नहीं हो सकती। पानी मे तैरने वाले की शरीर-रचना यदि दोनो तरफ़ चुरट की तरह हो तो वह तैरने वाले के लिए विशेष उपयोगी होगी, क्योंकि ऐसा शरीर-रचना से पानी के प्रतिरोध मे कमी होकर तैरने वाले को तैरने में सुगमता हो जाती है। इसी प्रकार तैरने मे पाँवों की अपेक्षा हाथो का ही उपयोग अधिक होता है, जैसा कि तैरना जाननेवालों को प्रत्यक्ष अनुभव भी होगा। इन दोनों कारणों से पानी में रहने वाले जीवो के लिए कैसी शरीर-रचना अपेक्षाकृत अधिक श्रेयस्कर होगी, यह पाठक समझ ही गये होगे। अब यदि हम चित्र में प्रदर्शित ह्वेमछली तथा सीलमछली की शरीर-रचना को देखें तो मालूम हो जायगा कि उपर्युक्त दोनों भेद थोड़े-बहुत परिमाण में इनमे बने ही हुए हैं। हाथो का रूपान्तर तो दोनो ही में परो या डैने (Fin) में हो गया है, और चूकि पानी में रहते हुए इन्हे अपने इन परों पर ही अवलम्बित रहना पड़ता है, इसलिए इनमें मज़बूती भी खूब आ गई है। इसी प्रकार मनुष्य के हाथ की अंगुलियो मे उन्हें अलग-अलग करने की जो सामर्थ्य होती है,

देवमछली तथा सीलमछली मे वह नष्ट होकर हाथो का रूपान्तर करने मे सारा लक्ष्य तैरने की सुविधा पर दिया गया है, जिससे सारे हाथ पर एक प्रकार के छोटे-छोटे कोश होकर उनका एक अच्छा-भला डैना ही बन गया है।

तैरने मे पाँवो का विशेष उपयोग नहीं होता, यह पहले कहा ही जा चुका है, अतः स्वभावतः जलचर प्राणियो मे उनकी कोई खास जरूरत न रही। इसीलिए देवमछली मे पाँवों का भाग नष्ट होकर पैर बिलकुल नहीं-से रह गये है। परन्तु इसके विपरीत सीलमछली है अर्द्धजलचर, जिससे उसे थोड़ा-बहुत जमीन पर चलना ही पड़ता है। अतः हाथो का तो यद्यपि उसमे भी देव-मछली ही के समान रूपान्तर हो गया है, पर पाँवो का थोड़ा अवशेष रह ही गया है। (चित्र नं० ४ व ५)

लेकिन बाह्याकृति मे इतनी विभिन्नता हो जाने पर भी इन दोनो प्राणियो के डैनो की अन्तर्रचना मे तो सब हड्डियाॅ और उनकी रचना करीब-करीब मनुष्य के हाथ के समान ही हैं, जैसा कि चित्र नं० ३ मे देखा जा सकता है। इस चित्र में पाठक देखेंगे कि, जैसा ऊपर कहा जा चुका है, देवमछली मे पैरो का कोई निशान नही है, परन्तु सीलमछली के शरीर की बाह्याकृति में हमे पैरो का थोड़ा-बहुत निशान मिलता है और अखीर में क़रीब-करीब मनुष्य के पैरो की हड्डियो के समान ही हड्डियाँ

दृष्टिगोचर होती हैं—यही नहीं किन्तु ये हड्डियाँ सीलमछली के शरीर में जुड़ भी उसी प्रकार रही है, जैसे कि मनुष्य के शरीर में पैर जुड़े रहते हैं।

यह तो हुआ जलचर प्राणियों के सम्बन्ध में। अब पक्षियों को लीजिए। पक्षियों में हाथों का रूपान्तर, डैने के बजाय, पङ्खों में हुआ दिखलाई देता है, और वह इस प्रकार कि जिससे उड़ते समय, वायु में संचार करने में, उन्हे सुगमता रहे। यह तो सभी को मालूम है कि मनुष्य के हाथ में अधिकांश शक्ति कलाई व बाजू ही के स्नायुओं में रहने के कारण अंगुलियों के स्नायुओं में बहुत कमजोर रहता है। अत. हाथों का उपयोग जब उड़ने के लिए होने लगा, तो, उससे अंगुलियों की अपेक्षा कलाई की जरूरत अधिक होती ही है, इसलिए पक्षियों मे अगुलियों की लम्बाई कम होकर पङ्खों का अधिकांश विस्तार कलाई और भुजा में होना स्वाभाविक ही था—अर्थात् अंगुलियों की जगह उनमें कलाई और बाजू अधिक लम्बे हो गये। मगर अंगुलियों की संख्या मे कमी और आकार में विभिन्नता हो जाने पर भी, जैसा कि चित्र नं० ६ में दिखाई देगा, उनके और सब भाग तो ज्यों-के-त्योंही कायम हैं, यहाँ तक कि उनके बजाय यदि चिमगादड़ का पङ्ख लिया जाय तो उसमें तो हमें अंगुलियों की संख्या तक ज्यों-की-त्यों मौजूद मिलती है।

ऐसी दशा में उपर्युक्त सब बातों की समाधानकारक उपपत्ति कैसे लगाई जाय ? उदाहरण के लिए इन प्राणियों के एक विशेष अवयव का तुलनात्मक विचार करके यह तो हम देख ही चुके हैं कि अपनी-अपनी सुविधा-असुविधा के अनुसार इन विभिन्न प्राणियों की शक्ल-सूरतों में भी विभिन्नता हो गई है। मगर लुत्फ यह है कि इतने पर भी उस अवयव की अन्तर्रचना तो इन सब में अभी भी ज्यों-की-त्योंही एकसमान है, जैसा कि सूक्ष्मदृष्टि से विचार करके हम देख भी चुके हैं। फिर यह भी नहीं कि यह समानता उस अवयव की हड्डियों ही में हो, प्रत्युत् उसके स्नायुओं एवं रक्तवहियों में भी यही बात दृष्टिगोचर होती है। अत. देखना यह है कि अन्दर तो एकही तरह का ढाँचा और रचना भी एक ही तरह की, पर बाहर बिलकुल निराले प्राणी, वास्तव में यह बात क्या है—सृष्टिदेवता का कोई जादू है, या इसका कोई समाधानकारक कारण भी है ?

इन सब बातों का विचार करें तो, हमें यही कहना पड़ेगा, इस सब विभिन्नता का कारण, एक-दूसरे से सर्वथा भिन्न दीखनेवाले इन सब प्राणियों में किसी-न-किसी सामान्य तत्त्व का अस्तित्व ही होना चाहिए; अर्थात् इनमें कोई-न-कोई सर्वसामान्य सम्बन्ध अवश्य होगा, और आनुवंशिक संस्कार एवं विकास ही मानो वह तत्त्व या सम्बन्ध है। इस सिद्धान्त के अनुसार देवमछली,

सीलमछली, पक्षी और मनुष्य, इन सबके अत्यन्त प्राचीन काल के पूर्वज ज़मीन पर रहने वाले कोई-न-कोई प्राणी ही थे, जिनकी दशा मे क्रमानुसार परिवर्त्तन होते हुए कालान्तर में उनमें से कोई तो जलचर हो गया और किसी को वायु मे रहने का संयोग हुआ। अर्थात् जैसे-जैसे परिस्थिति बदलती गई उसके साथ-साथ उनके शरीरो में भी ऐसे परिवर्त्तन होना आवश्यक हुआ कि जिससे वे परिवर्त्तित स्थिति का मुकाबला कर सकें। और जिन भागों से इस विभिन्नता का आरम्भ होता है उनमें से मुख्य हैं— शरीर की चमड़ी, दाँत, नाख़ून आदि। चूँकि ये भाग प्रत्येक व्यक्ति मे समय-समय पर प्रायः बदलते ही रहते हैं, इसलिए सबसे पहले इन्हींसे परिवर्त्तन का आरम्भ होना स्वाभाविक ही है। परन्तु फिर शरीर के इनसे अधिक महत्व के भागो में भी परिवर्त्तन शुरू होकर कालान्तर में शरीर के बाह्यरूप में ऐसे फेर-बदल हो गये कि जिन्हे ज़मीन पर चलने के बजाय पानी में तैरने का संयोग हुआ वे तैरने के और जिन्हें वायु में उड़ने का संयोग हुआ वे उड़ने के उपयुक्त हो गये, अर्थात् एक ओर तो हाथ के डैने बन गये, दूसरी ओर पङ्ख या पर। सीलमछली में यह परिवर्त्तन पूरे तौरपर नहीं हुआ; क्योंकि, जैसा कि हम देख चुके हैं, उसके शरीर में यद्यपि पैर की बहुत-सी हड्डियाँ मिलती हैं तो भी उसके पैर छोटे रहकर सिरे पर आगे को मुड़े हुए होने

से चलने के प्रायः निरुपयोगी ही हो गये हैं। देवमछली का चूँकि पानी से अधिक सम्बन्ध रहता है, इसलिए वह इससे आगे बढ़ गई है; अर्थात् उसके शरीर में न केवल बाहर ही पैरो का नाम-निशान नहीं रहा बल्कि अन्दर भी नाम-मात्र ही अवशेष रह गया है। परन्तु ये जो फेर-बदल या परिवर्त्तन हुए, यह ध्यान रखने की बात है, वे सब पानी मे तैरने और आकाश में उड़ने में सुगमता होने की ही दृष्टि से हुए हैं। अर्थात् इन सबकी अन्तर्रचना एकसमान दीखने का कारण केवल यही है कि शेष भागो मे परिवर्त्तन की जरूरत न थी। इसपर से कहना पड़ेगा कि बाहर एक-दूसरे से बिलकुल भिन्न दीखनेवाले ऐसे प्राणियो की अन्तर्रचना मे हमे जो विलक्षण समानता दृष्टि-गोचर होती है उसे विकासवाद का समर्थक बढ़िया प्रमाण ही मानना होगा।

इसी प्रकार कई प्राणियो में कुछ ऐसे भाग मिलते हैं कि जो अन्य प्राणियो के वैसे ही भागो के बिलकुल ही समान होते हैं, किन्तु उनका उपयोग इन प्राणियो मे बिलकुल नहीं होता। इन्हे हम 'अवशिष्ट भाग' कह सकते हैं। जैसे किसी-किसी देवमछली के दाँत होते हैं, यद्यपि उनका उपयोग उसे कुछ भी नहीं होता। साँपों मे भी किसी-किसी मे बहुत जरा-जरा-से पाँव होते हैं, पर उपयोग इनमें भी उनका कुछ नही होता। ये अवशिष्ट

भाग इन प्राणियों में कहाँ से और क्यों आये, यह एक विचारणीय बात है। पर विकासवाद के अनुसार इस जिज्ञासा का समाधान भी भली-भाँति हो जाता है। क्योंकि विकासवाद के अनुसार इन अवशिष्ट भागों का पाया जाना यह सिद्ध करता है कि इन प्राणियों में अब चाहे इनका कोई उपयोग नहीं रहा परन्तु पहले किसी समय उनमें इनका उपयोग अवश्य होता था; बाद में जैसे-जैसे उपयोग कम होता गया उसके साथ-साथ ये भी घटते गये, यहाँ तक कि अन्त में उनके अवशेष-मात्र शेष रह गये। इसके लिए किसी दृष्टान्त की ज़रूरत हो तो हम उन स्वरों का उदाहरण ले सकते हैं, जिनका उच्चारण नहीं होता। यथा, मैंने, घर में, आदि। उच्चारण की दृष्टि से देखा जाय तो इन शब्दों में लगे हुए अनुस्वारों का उपयोग या आवश्यकता सर्वथा हुई नहीं; तथापि गौर करने पर पता चलेगा कि उनसे इन शब्दों के पूर्व-रूपों का परिचय मिलता है। इसी प्रकार विकासवाद के अनुसार हम कहेंगे कि उक्त अवशिष्ट भाग भी उन-उन प्राणियों के पूर्व-रूपों के ही परिचायक हैं।

विकास-सम्बन्धी और भी जोरदार प्रमाण की जरूरत हो तो वह गर्भशास्त्र में मिल सकता है, जो नीचे दिया जाता है।

किसी भी प्राणी की गर्भावस्था में होने वाली वृद्धि पर यदि हम सूक्ष्म दृष्टिपात करें तो हमें बड़े ही विचित्र चमत्कार दिखाई